EL INFINITO EN MATEMÁTICAS

CANTOR

Lo incontable es lo que cuenta



NATIONAL GEOGRAPHIC

GEORG CANTOR fue el primero en abordar con rigor matemático un concepto de tanto calado filosófico como el infinito. Lo hizo a partir de una forma nueva de entender las matemáticas, la teoría de conjuntos, y fruto de su trabajo son nociones tan contrarias a la intuición como que hay infinitos «mayores» que otros. Antes de sus aportaciones fundamentales, planteadas en el último cuarto del siglo XIX, el infinito se consideraba una ficción útil, en una tradición de pensamiento que se remontaba a Aristóteles. El atrevimiento le salió caro: sus ideas despertaron el rechazo furibundo de muchos de sus contemporáneos, circunstancia que bien pudo ser el desencadenante de la locura que le llevó a la muerte.

EL INFINITO EN MATEMÁTICAS

CANTOR

Lo incontable es lo que cuenta

NATIONAL GEOGRAPHIC

GUSTAVO ERNESTO PIÑEIRO es matemático, escritor y divulgador. Es docente y escribe sobre ciencia en medios escritos generalistas y en revistas especializadas. Es autor de diversos libros de texto.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Academia Berlín-Brandenburgo de Ciencias y Humanidades: 43bd; Album: 43bi; Archivo RBA: 21ai, 31, 43ad, 77ai, 77ad, 77bi, 77bd, 80, 96, 108, 121ad, 121bd, 151, 159, 167; Biblioteca Nacional de Francia: 121bi; Familienarchiv Thomas Schilling: 105; Herzog Anton Ulrich Museum: 102; Integrierte Gesamtschule Halle: 161a, 161b; Andrew Krizhanovsky: 21ad; Museo de la Ciudad de Berlín: 21b; Universidad de Agder, Noruega: 100; Universidad de Hamburgo: 43ai; Universidad de Münster: 121ai.

ISBN: 978-84-473-7672-8
Depósito legal: B-12132-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

Cuando contemplamos el cielo en una noche estrellada y sin luna, lejos de la interferencia de las luces de la ciudad, y nos sentimos maravillados por el espectáculo sobrecogedor que se despliega ante nosotros, en ese mismo momento desde lo más profundo de nuestro ser nace un sentimiento que nos abruma con la idea de lo pequeños que somos comparados con el infinito.

El infinito no es solo una sofisticada idea matemática; la dualidad entre lo infinito, palabra que literalmente significa «aquello que jamás termina», y su opuesto, lo finito, lo que sí acaba alguna vez, ha acompañado a la humanidad probablemente desde que el primer *Homo sapiens* se preguntó si el cielo termina alguna vez, si se puede llegar hasta el horizonte, o si nuestra vida realmente termina o si de alguna manera puede seguir indefinidamente.

Pero el infinito también es vértigo y, según el filósofo griego Zenón de Elea, hasta puede inmovilizar al universo; veamos qué queremos decir con esta idea. En el siglo VI a.C., Parménides de Elea —según muchos autores, el padre de la metafísica occidental— postuló la existencia del *ser*. La característica fundamental del *ser*, según Parménides, es, justamente, la de existir; el *ser* existe, el *ser* es.

De esta premisa Parménides dedujo que el *ser* abarca todo el universo, porque si hubiera aunque sea alguna pequeña región de este donde el *ser* no estuviera, en esa región el *ser* no existiría; pero decir que el *ser* no existe es una contradicción de términos, es imposible. El *ser*, entonces, ocupa todo el universo; en otras

palabras, el universo entero, nosotros incluidos, constituye el *ser*. Pero además, el *ser* es inmutable, no puede cambiar, porque si pasara, digamos, de un estado *A* a un estado *B*, entonces dejaría de existir en el estado *A*, y eso es imposible, porque el *ser* no puede dejar de existir. El *ser* es, en consecuencia, todo el universo, y es inmutable; por lo tanto, el universo es inmutable. Esto significa que el cambio y el movimiento que creemos ver a nuestro alrededor en realidad no existen; el tiempo no existe, en el *ser* no hay pasado ni futuro, solamente hay ahora.

Zenón, discípulo de Parménides, planteó una serie de razonamientos, conocidos como las *paradojas de Zenón*, con los que intentó demostrar, en respaldo de las ideas de su maestro, que el cambio y el movimiento no existen, que lo que creemos ver no es más que un engaño de los sentidos, y que la mente y la razón, guiadas por la lógica, son capaces de demostrar este hecho.

Todas las paradojas de Zenón involucran el infinito de algún modo; una de ellas dice que si arrojamos una piedra hacia un árbol que está a un metro de distancia delante de nosotros, entonces, contrariamente a lo que la vista parece mostrarnos, la piedra jamás llega al árbol; de hecho, jamás abandona nuestra mano.

Para demostrarlo, Zenón decía que antes de llegar al árbol la piedra debe recorrer primero medio metro; pero antes de eso, debe recorrer un cuarto de metro; y antes debe recorrer un octavo de metro; y antes, un dieciseisavo de metro; y así sucesivamente. En realidad, para llegar al árbol la piedra debe completar una cantidad infinita de pasos previos, pero es imposible completar infinitos pasos en un tiempo finito; por lo tanto, deduce Zenón, la piedra jamás llega al árbol. Más aún, el mismo razonamiento que hemos hecho para una distancia de un metro, vale también para el primer milímetro o la primera milésima de milímetro; por lo que la piedra, en realidad, tal como dijimos antes, nunca abandona nuestra mano. El infinito, como se ha expuesto, permite demostrar, según Zenón, que el universo es inmutable.

En el siglo IV a.C., Aristóteles —el padre del estudio sistemático de la lógica y tal vez de la ciencia en general— escribió su *Física*, un tratado que contiene, entre otras cuestiones, un estudio del movimiento de los cuerpos; pero, desde luego, antes de

estudiar el movimiento Aristóteles debía demostrar que ese movimiento realmente existe; es decir, debía refutar los argumentos de Parménides y de Zenón.

Si el *ser* esencialmente *es*, ¿cómo puede entonces cambiar de estado, cómo puede dejar de ser algo? Aristóteles dice que el *ser* *es*, en efecto, pero que a veces *es* en potencia y a veces *es* en acto. Cuando un niño crece y se transforma en adulto, no es que deje de ser un niño, sino que siendo niño era un adulto en potencia y al crecer pasa a ser un adulto en acto. Es decir, muta del estado de *ser un adulto en potencia*, al estado de *ser un adulto en acto*; el niño cambió, pero nunca dejó de *ser*. Una semilla es una planta en potencia, una hoja en blanco es un texto en potencia, y así sucesivamente. Siglos más tarde, Miguel Ángel expresaría una idea similar al decir que la escultura ya existía en el bloque de mármol y que él se limitaba a quitar lo que sobraba. Aristóteles reconcilia de esta manera la idea del *ser* de Parménides con la posibilidad del cambio.

Demostrado que el *ser* puede mutar, ¿cómo se refutan los argumentos de Zenón? Todas las paradojas de Zenón suponen que el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles. En la paradoja del árbol, por ejemplo, hay infinitos pasos en el espacio que media entre la mano y el árbol. Para refutar estos argumentos, Aristóteles afirmó que el infinito no existe; o, mejor dicho, que existe, pero solamente en potencia, nunca en acto. Infinito en potencia refiere a una cantidad que puede crecer tanto como se quiera, pero que todo el tiempo es finita; infinito en acto es una cantidad que, de hecho, es infinita. Esta distinción es muy importante a la hora de pensar el infinito y volveremos varias veces a ella a lo largo de esta obra.

Podemos admitir —dice Aristóteles— la existencia de cantidades que crecen indefinidamente, pero que son finitas todo el tiempo; sin embargo, no podemos admitir la existencia de cantidades infinitas de hecho. Podemos dividir la distancia entre la mano y el árbol en diez partes, o en cien, o en mil, o en cualquier cantidad finita tan grande como queramos, pero no podemos asumir que está dividida en una cantidad de partes que sea de hecho infinita.

Aristóteles no se limitó a postular la inexistencia del infinito en acto, sino que dio una serie de argumentos para sustentar esta afirmación; como los argumentos de Aristóteles serán analizados a lo

largo de este libro, no los comentaremos aquí. Sin embargo, sí diremos que el rechazo aristotélico al infinito en acto marcó durante más de dos mil años la ortodoxia del pensamiento occidental; y, además de la fuerza de los argumentos de Aristóteles, muy probablemente este dominio estuvo favorecido también por dos circunstancias.

La primera es que la mente humana es incapaz de representarse una imagen del infinito en acto, por lo que resulta muy fácil aceptar que en realidad no existe. En efecto, sí podemos concebir, quizá, el infinito en potencia, podemos pensar en una cantidad que crece ilimitadamente; pero, insistimos, no el infinito en acto. ¿Qué sería representarse, por ejemplo, la imagen de una recta cuya longitud es infinita en acto? Sería pensar en una línea completa (es decir, lo que «vemos» con la mente no debería ser solo un fragmento) cuya longitud es de hecho infinita. Pero la mente no puede abarcar esa imagen; sí podemos pensar en una línea que se pierde en el horizonte y decirnos que sigue indefinidamente, pero en realidad estaríamos «viendo» una recta infinita en potencia, ya que nuestra «vista» solo abarca una parte. O pensemos en los números 0, 1, 2, 3, 4, 5,...; visualizarlos como un infinito en acto sería pensarlos escritos todos juntos en una lista, *todos* sin excepción, una lista que está completa, pero que a la vez nunca termina, una imagen inabarcable para nuestra mente finita.

El segundo motivo por el que el rechazo aristotélico al infinito en acto resultó convincente es que, al razonar a partir del infinito, parece casi inevitable caer en contradicciones lógicas o en conclusiones extrañas que son contrarias al sentido común; como en el caso de Zenón, a quien el infinito le permitió demostrar la inexistencia del cambio y del movimiento. Otro ejemplo lo tenemos en el siglo XVII, cuando Galileo Galilei se encontró también con contradicciones que lo llevarían a rechazar la idea del infinito en acto; en el siglo XIX, por su parte, el matemático checo Bernard Bolzano intentó desarrollar una teoría del infinito matemático, pero también se encontró con paradojas que no supo resolver satisfactoriamente; estos dos casos serán comentados a lo largo del presente libro.

Es cierto que hubo algunas discrepancias con respecto al pensamiento aristotélico; por ejemplo, en el siglo I d.C., el filósofo y poeta romano Lucrecio, en su poema didáctico *De rerum natura*

(Sobre la naturaleza de las cosas), argumentó que el universo debe ser infinito; en caso contrario —dice Lucrecio—, tendría una frontera, y si arrojáramos un objeto hacia esa frontera con la suficiente fuerza como para atravesarla, entonces ese objeto pasaría a existir fuera del universo; pero es imposible porque, por definición, nada puede existir fuera del universo. Hoy sabemos, sin embargo, que el argumento de Lucrecio es falaz, que el universo puede ser finito sin tener una frontera, de la misma manera que la superficie de una esfera es finita, pero sin tener una frontera. De hecho, según las modernas teorías cosmológicas, es muy probable que el universo en su conjunto sea finito. Pero las disidencias fueron escasas y aisladas, y el pensamiento aristotélico sobre el infinito, como dijimos antes, dominó en la filosofía y también en las matemáticas; al menos hasta la década de 1870. En esa época, el matemático ruso-alemán Georg Cantor se vio llevado por la lógica de sus investigaciones, casi contra su voluntad según sus propias palabras, a introducir en las matemáticas el estudio del infinito en acto. La tarea no fue fácil, no solo por las dificultades que ella conlleva, sino también por la dura oposición que encontró entre muchos de sus colegas; no era fácil romper con una tradición de milenios y Cantor llegó a ser tratado de «científico charlatán» y «corruptor de la juventud».

Sin embargo, Cantor no se detuvo, e impulsado por la convicción de que una teoría matemática del infinito era posible, y hasta necesaria, y guiado por una lógica inflexible, desarrolló una de las teorías más asombrosas que hoy se conocen; pero abrió además la posibilidad de un modo nuevo de pensar a las matemáticas en su conjunto, un modo más libre y potente.

Uno de los conceptos más originales que introdujo Cantor es el de los ordinales; la teoría de los ordinales será comentada en las siguientes páginas, por lo que no entraremos aquí en sus detalles; basta decir que se trata, esencialmente, de números que permiten contar más allá del infinito. Después de los infinitos números 0, 1, 2, 3, 4, 5,... —dice Cantor—, viene el *número infinito* (es decir, el ordinal) ω, el símbolo es la letra griega omega minúscula; luego vienen $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$,...; y después de esta nueva serie de infinitos ordinales viene $\omega+\omega$, y luego $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2$,...; y así sucesivamente.

Pero, ¿es lícito *inventar* números así como así? ¿Qué representa ese «número» ω? Hasta el siglo XIX, todos los conceptos con los que trabajaban los matemáticos estaban fuertemente ligados a problemas que podemos llamar «concretos», a situaciones que podían ser visualizadas o asociadas con hechos reales; como la descripción de fenómenos físicos, el estudio de las propiedades de los objetos geométricos, o las propiedades de las cantidades finitas (1, 2, 3, 4,...). El número 0, por ejemplo, que representa una «cantidad que no es», debió esperar muchos siglos antes de ser reconocido como un número de pleno derecho; otro tanto puede decirse de los números negativos, cuya existencia, por ejemplo, era todavía rechazada por Leibniz, en una fecha tan cercana como principios del siglo XVIII. Los números, en general, solo eran aceptados si representaban, de algún modo, una cantidad que pudiera visualizarse de manera concreta.

El número ω representa una cantidad infinita en acto, no representa ningún objeto concreto ni ningún fenómeno físico, ni puede visualizarse más que con los ojos de la mente. Pero Cantor, con su pensamiento riguroso, nos obligó a aceptarlo como existente, y su modo de entender las matemáticas debió cambiar para adaptarse a este hecho. Es así como, hoy en día, ya no se exige a los objetos matemáticos que tengan un correlato real o que sean la representación de un fenómeno concreto; solo se les pide coherencia lógica, y dentro de esa única exigencia los matemáticos actuales son libres de crear, estudiar, manipular y analizar conceptos, ideas y teorías.

La esencia de las matemáticas cambió después de Cantor, y él mismo hubiera visto con enorme satisfacción este nuevo estado de cosas, estado en el que los matemáticos pueden crear libremente teorías y conceptos. Podemos afirmar que Cantor lo hubiera visto con satisfacción, porque fue él quien dijo que las *matemáticas puras* debían ser llamadas con más propiedad *matemáticas libres*, porque, según sus propias palabras, «la esencia de la matemática radica precisamente en su libertad».

1845 El 3 de marzo, en San Petersburgo, Rusia, nace Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, hijo de Georg Waldemar Cantor y de Maria Anna Böhm.

1856 La familia Cantor se muda a Alemania.

1862 Cantor desea estudiar matemáticas, pero su padre se opone e ingresa en el Politécnico de Zúrich para estudiar ingeniería. Pocos meses después, el padre le da su permiso para que estudie matemáticas, en el mismo centro.

1863 Muere su padre; Georg y su madre se mudan a Berlín, donde completará sus estudios de matemáticas.

1867 Obtiene el doctorado en matemáticas en la Universidad de Berlín.

1869 Comienza a trabajar en la Universidad de Halle.

1872 Conoce a Richard Dedekind. Muchas de las ideas de Cantor sobre el infinito saldrán a la luz por primera vez en cartas escritas a Dedekind.

1874 Se casa con Vally Guttmann; los Cantor tendrán seis hijos. Ese mismo año se publica su artículo «Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos», donde aparecen por primera vez sus ideas sobre el infinito, aunque, por recomendación de Karl Weierstrass, esas ideas están «ocultas».

1878 Se publica «Una contribución a la teoría de las variedades», donde Cantor plantea explícitamente sus ideas sobre el infinito. Leopold Kronecker pone en juego toda su influencia para evitar que el artículo se publique.

1883 Publicación de «Fundamentos para una teoría general de variedades», que constituye el punto culminante de la creatividad matemática de Cantor.

1884 En mayo sufre un ataque depresivo, y abandona toda investigación matemática durante más de cinco años.

1890 Se crea la Unión Matemática Alemana y Cantor es elegido como su primer presidente.

1892 Se publica «Sobre una cuestión elemental de la teoría de las variedades», donde aparece su famosa «demostración de la diagonal».

1895 Publicación de la primera parte de «Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos»; la segunda parte vio la luz en 1897.

1899 El 16 de diciembre muere su hijo Rudolf, de trece años. La pérdida desencadena en Cantor una enfermedad mental de la que nunca se recuperó.

1918 Fallece en la clínica psiquiátrica de Halle el 6 de enero.

CAPÍTULO 1

El comienzo del infinito

Hay algunas preguntas que han acompañado a la humanidad desde que los primeros hombres y mujeres se sentaron alrededor del fuego a pensar e indagar acerca de todo aquello que los rodeaba. ¿El mundo existe desde siempre o comenzó a existir en algún momento? ¿Dejará alguna vez de existir? ¿Tiene el cielo un final o podríamos viajar por él indefinidamente? Detrás de todas estas preguntas subyace uno de los conceptos más potentes y maravillosos jamás concebidos: el infinito.

Casi todas las ramas de las matemáticas son el resultado de un largo proceso histórico que se fue desarrollando a lo largo de décadas o siglos, con el aporte de muchas personas, y en el que suele ser muy difícil, por no decir imposible, señalar claramente un único iniciador. Por supuesto, este es el caso de las ramas más antiguas de las matemáticas, como la geometría o el álgebra, cuyos comienzos se remontan al antiguo Egipto o a la antigua Mesopotamia; pero también es el caso de ramas más recientes, como el cálculo, por ejemplo, que fue creado a finales del siglo XVII simultánea e independientemente por dos ilustres matemáticos, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz, quienes en realidad dieron forma a ideas que muchos precursores habían estado investigando durante siglos (hablaremos un poco más sobre la historia del cálculo en el capítulo 3).

Sin embargo, la teoría matemática del infinito (y la teoría de conjuntos, ya que, como veremos en estas páginas, ambas teorías son esencialmente la misma) es el fruto del talento y de la imaginación de un solo hombre, que la creó casi de la nada, el matemático ruso-alemán Georg Cantor.

Inclusive es posible señalar el momento casi exacto en el que Cantor dio el salto creativo que le llevó a su teoría; en una carta fechada el 5 de noviembre de 1882 le escribió a su amigo y colega Richard Dedekind:

> Precisamente desde nuestros últimos encuentros en Harzburg y Eisenach [ciudades alemanas en las que ambos se habían encontrado en septiembre de 1882], Dios Todopoderoso me ha concedido alcanzar las aclaraciones más notables e inesperadas en la teoría de conjuntos y en la teoría de números [se refiere, como veremos en el capítulo 4, a números infinitos], o, más bien, que encontrara aquello que ha fermentado en mí durante años y que he buscado tanto tiempo.

¿Cómo alcanzó Cantor estas «aclaraciones tan notables»? ¿Qué desencadenó ese «fermento»? Para comprenderlo, iremos avanzando paso a paso a lo largo de estas páginas por el camino que siguieron las ideas de Cantor. Comenzaremos, como corresponde, por el principio.

DE SAN PETERSBURGO A HALLE

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, el 3 de marzo de 1845. Su padre, Georg Waldemar Cantor, era un exitoso comerciante de origen danés, muy religioso y amante de la cultura y de las artes. Su madre, Maria Anna Böhm, era hija de dos eximios violinistas rusos y, ella misma también, una virtuosa del violín. El propio Georg heredó ese talento para la música y años más tarde, un poco en broma, un poco en serio, se lamentaría de que su padre no le hubiera permitido convertirse en violinista profesional.

La música y el arte en general fueron siempre muy importantes en la vida de Cantor. De hecho, el arte y las matemáticas no eran para él dominios alejados entre sí; por el contrario, siempre creyó que el trabajo del matemático estaba muy ligado a la creatividad artística (idea que es compartida por muchos matemáticos actuales, entre quienes se cuenta el autor de estas líneas). Por ejemplo, en 1883, en el artículo donde volcó las «notables aclaraciones» de las que hablaba en su carta a Dedekind, Cantor escribió: «La *esencia* de la *matemática* radica precisamente en su *libertad*» (las cursivas son del original). En ese mismo texto dice:

> Debido a esta posición destacada, que la distingue de todas las demás ciencias y proporciona una explicación del carácter relativamente fácil y desenvuelto que el ocuparse de ella tiene, merece especialmente el nombre de *matemática libre*, una denominación a la que, si fuese mía la elección, daría preferencia sobre la de matemática «pura», que ha llegado a ser usual.

Es decir, el matemático tiene la libertad de dejar volar su imaginación, la libertad de crear conceptos, siempre y cuando estos no conduzcan a contradicciones lógicas. Pero si esas contradicciones lógicas no se producen entonces, afirmaba Cantor, puede asegurarse que los objetos así creados existen realmente. El matemático, al tener el poder de crear nuevos conceptos, es tanto un científico como un artista. Estas ideas, además de reflejar el pensamiento de Cantor, tenían para él, en ese histórico artículo en particular, una finalidad «estratégica» de la que hablaremos en los próximos capítulos.

Pero volvamos ahora una vez más a los primeros años de la vida de Cantor. Su padre tenía una salud muy frágil y a causa de ello en 1856 los médicos le aconsejaron que dejara los crudos inviernos de San Petersburgo y se mudara a alguna región de clima más templado. Cantor padre liquidó entonces todos sus negocios y se trasladó con la familia a Alemania. Inicialmente, los Cantor vivieron en la ciudad de Wiesbaden, donde Georg asistió al Gymnasium (el equivalente alemán de la escuela secundaria), pero poco tiempo después se trasladaron a Fránkfurt.

Georg recordó siempre con nostalgia su infancia en San Petersburgo, más aún, a pesar de que vivió en Alemania el resto de su vida, nunca se sintió completamente a gusto allí. Es interesante agregar que, hasta donde se sabe (y esto es característico de su personalidad romántica y a veces exaltada), desde 1856 en adelante nunca volvió a escribir en ruso.

Durante sus años en el Gymnasium los informes escolares destacaron siempre la notable habilidad de Cantor para las matemáticas, y aunque en un principio su padre insistió en que estudiara ingeniería, finalmente en 1863 ingresó en la Universidad de Berlín para estudiar la que era su verdadera vocación, podríamos

decir que su pasión, las matemáticas. En esa época, la Universidad de Berlín era uno de los centros de investigación matemática más importantes del mundo. Por ejemplo, enseñaban allí los renombrados matemáticos Karl Weierstrass y Ernst Kummer, que fueron ambos profesores de Cantor. También lo fue Leopold Kronecker, quien volverá más adelante a estas páginas, dado que llegaría a transformarse con el tiempo en uno de los enemigos más implacables de la teoría del infinito.

Cantor se doctoró en Berlín en 1867 y dos años más tarde obtuvo una plaza de profesor en la Universidad de Halle. Hablaremos en el próximo capítulo de sus primeros tiempos en esta ciudad, pero podemos adelantar que fue allí, en Halle, donde Cantor desarrolló su teoría del infinito matemático, es decir, donde hizo los descubrimientos que le llevaron a ocupar el lugar destacado que tiene en la historia de las matemáticas.

Pero estas ideas no se impusieron fácilmente, sino que hallaron mucha resistencia. Como muestra de esa resistencia ya hemos mencionado a Kronecker, quien haría todo lo posible para que las ideas de Cantor no se difundieran. Otro ejemplo que podemos añadir data de 1874, cuando Cantor quiso publicar sus primeros descubrimientos acerca del infinito. Al ver el borrador de su artículo, Weierstrass le aconsejó que no hiciera mención a las consecuencias más radicales de los teoremas expuestos en él; de hecho, le aconsejó que no incluyera ninguna referencia explícita al infinito.

¿Por qué se produjeron estas reacciones tan adversas? ¿Qué consecuencias implicaba el artículo de 1874 y por qué esas consecuencias eran tan revolucionarias? Para responder estas preguntas, tenemos que conocer primero la historia del infinito.

EN POTENCIA O EN ACTO

¿Qué es el infinito? Con mayor precisión, ¿qué queremos decir cuando afirmamos que una colección de objetos es infinita? Antes que nada, aclaremos que usaremos aquí la palabra «objeto» en su sentido más amplio, incluyendo objetos abstractos o imaginarios.







FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Los padres de Cantor, Georg Waldemar Cantor y Maria Anna Böhm. Él era un reconocido comerciante, y ella una virtuosa violinista.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Placa conservada en la casa de San Petersburgo donde nació Cantor. En ella, en ruso, se lee: «En este edificio nació y vivió entre 1845 y 1854 el gran matemático y creador de la teoría de conjuntos, Georg Cantor».

FOTO INFERIOR:
La Universidad de Berlín en 1880, en la que Cantor obtuvo el doctorado en matemáticas en 1867.

Podríamos hablar, por poner un ejemplo, de la colección formada por todos los días del mes de diciembre del año 3000.

Hecha esta aclaración, volvamos a la pregunta inicial, y para comenzar a acercarnos a su respuesta analicemos primero el concepto opuesto, mucho más familiar, de finitud. Preguntémonos entonces qué significa que una colección de objetos sea finita.

La palabra «finita» quiere decir, literalmente, «que termina», «que no sigue indefinidamente». Con esta idea en mente, podemos afirmar que una colección de objetos es finita si es posible, al menos en teoría, contar uno por uno todos los objetos que la forman de modo que la cuenta termine en algún momento.

La colección de todos los días del mes de diciembre del año 3000, que mencionábamos antes, es finita. Para mostrar otro ejemplo, imaginemos que a cada una de las personas adultas que viven hoy sobre la Tierra le pedimos que cierre herméticamente una botella llena de aire. La colección formada por todas las moléculas de oxígeno contenidas en esos miles de millones de botellas también es finita. Por supuesto, en este último caso sería extremadamente difícil en la práctica contar uno por uno todos los objetos que forman la colección, pero las dificultades prácticas no son relevantes para el concepto de finitud, el punto importante es el hecho teórico de que la cuenta terminaría en algún momento, aun cuando ese momento tarde siglos en llegar.

Por oposición, una colección es infinita si al intentar contar uno por uno todos los objetos que la forman resulta que esa cuenta nunca termina. Conviene enfatizar que en esta definición no estamos usando la palabra «nunca» en un sentido metafórico, como sinónimo de «por muchísimo tiempo», sino que, por el contrario, «nunca» debe ser entendida aquí en el sentido más potente y literal de «jamás por toda la eternidad».

La idea del infinito, y esta distinción que haremos es muy importante, puede ser entendida a su vez de dos maneras bien diferentes. El infinito puede ser en potencia o puede ser en acto.

Para comprender la diferencia entre una y otra manera de ver el infinito imaginemos un escriba que se ha propuesto la tarea de anotar, uno por uno, todos los números naturales (que son los números que se obtienen a partir del 0, sumando 1 cada vez; es decir, los nú-

meros 0, 1, 2, 3, 4,...). El escriba comienza a anotar y después de un rato llega al número cien, más tarde al mil y más adelante al diez mil.

Observemos que el trabajo que el escriba se ha impuesto nunca terminará porque, por ejemplo, cuando llegue al número cien mil, deberá seguir con el cien mil uno, cuando llegue al millón, deberá seguir con el número un millón uno, y así sucesivamente. Nunca llegará al último número natural, simplemente porque tal último número natural no existe; siempre habrá un número más por escribir, y otro, y otro.

> «Protesto contra el uso de magnitudes infinitas como algo completo, lo que en matemáticas nunca se permite.»
>
> — Carl Friedrich Gauss, en una carta escrita en 1831.

En algún momento el escriba se da cuenta de que no le alcanzará la vida para completar la tarea, y entonces entrena a un discípulo para que, llegado el momento, continúe con el trabajo de anotar los números. Este segundo escriba, a su vez, entrenará a su propio discípulo, y así sucesivamente por tiempo indefinido.

¿Es infinita la colección de todos los números anotados por estos escribas? La respuesta es que sí, es infinita, pero solo en un sentido potencial. La colección de los números anotados no es una colección estática, sino que está en constante crecimiento, un crecimiento sostenido que no se detendrá jamás. Fijado un instante cualquiera en el tiempo, no importa lo lejano en el futuro que esté, la colección de todos los números escritos hasta ese preciso momento será finita, pero seguirá siempre creciendo sin limitaciones.

Hablamos entonces de un infinito en potencia, o potencial, cuando pensamos en una colección que es siempre finita, pero que puede ser aumentada indefinidamente sin restricciones. La infinitud está pensada en este caso como una propiedad negativa, asociada a la imposibilidad de completar una tarea.

Pero pensemos ahora en la colección formada por todos los números naturales, absolutamente todos sin excepción (sin importar si no han sido escritos). Se trata obviamente de una colección que es también infinita, pero en este caso se trata de un

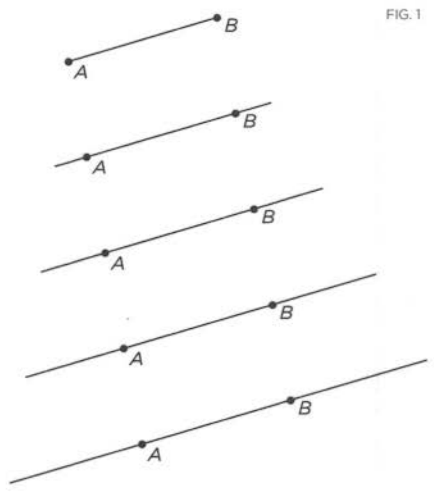
infinito estático, completo. En esta nueva colección están todos los números, no queda ya nada por agregar. Hablamos en este caso de un infinito en acto, o infinito actual.

Podemos extender la misma idea a magnitudes, como pesos, volúmenes o longitudes. Si dibujamos, por ejemplo, un segmento (un trazo recto que conecta un punto *A* con un punto *B*), su longitud será obviamente finita. Pero la geometría nos dice que podemos prolongar esa línea tanto como queramos, y si admitimos que esa prolongación puede seguir indefinidamente, tendremos entonces un trazo cuya longitud es infinita en potencia. Es decir, es finita en todo momento, pero puede crecer de modo indefinido (figura 1).

Sin embargo, las rectas que considera la geometría moderna tienen una longitud que se supone infinita en acto, estas rectas no tienen extremos y se extienden indefinidamente sin principio ni fin. Notemos que, de hecho, una recta es imposible de dibujar.

Es interesante observar que, hasta donde se sabe, todas las colecciones o las magnitudes relacionadas con fenómenos naturales nunca son infinitas en acto; por el contrario, la mayoría son finitas y solo unas pocas son, quizá, infinitas pero solamente en potencia. Por ejemplo, según las teorías físicas hoy en día vigentes, la materia no es infinitamente divisible, sino que cada átomo está formado por una cantidad finita de partículas elementales indivisibles. Es posible, incluso, que ni el espacio ni el tiempo sean infinitamente divisibles.

FIG. 1



Por otra parte, los cosmólogos afirman que es muy probable que el universo en su conjunto tenga un volumen y un diámetro que son solo potencialmente infinitos (el diámetro del universo es la mayor distancia que puede medirse entre dos puntos del mismo).

Si resultara que es cierto que el universo continuará expandiéndose de modo indefinido, entonces su edad medida en segundos también sería solo potencialmente infinita. Para trazar un paralelismo con el ejemplo de los escribas, podemos imaginar a estas personas anotando un número por cada segundo transcurrido desde el Big Bang; la colección de todos los segundos registrados estaría en perpetuo crecimiento, pero siempre sería finita.

> «El número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño de nuestro cosmos es menor que 1 000 unidades del séptimo orden [es decir, un 1 seguido de 51 ceros, una cantidad enorme, pero finita].»
>
> — Arquímedes, en *El Arenario*.

En resumen, tiempo, materia y espacio serían todos finitos, o a lo sumo infinitos en potencia. No debe resultarnos extraño, entonces, que en el siglo IV a.C. Aristóteles afirmara que el infinito en acto simplemente no existe.

EL INFINITO DE ARISTÓTELES

Aristóteles fue el primero en estudiar la distinción que hay entre «ser en potencia» y «ser en acto». Por ejemplo, podemos decir que un niño es un adulto en potencia o que un bloque de mármol es potencialmente una escultura. Cuando el niño crece se transforma, en acto, en un adulto; el escultor, por otra parte, convierte al bloque de mármol en una escultura que existe en acto. «Se da igualmente el nombre de sabio en potencia hasta al que no estudia», dice Aristóteles en el Libro IX de su *Metafísica*, quizá con un toque de humor. Pero en relación al infinito, en ese mismo texto establece que:

> La potencia respecto al infinito no es de una naturaleza tal que el acto pueda jamás realizarse.

Es decir, el infinito siempre es en potencia, nunca en acto. A lo largo de más de dos mil años, concretamente hasta mediados del siglo XIX, este rechazo aristotélico al infinito en acto fue sostenido por casi toda la ortodoxia del pensamiento occidental, tanto filosófico como matemático. Vale la pena entonces detenerse en el análisis de al menos dos de los argumentos que expuso Aristóteles para justificar su afirmación.

«La expresión "existencia potencial" no se debe tomar en el sentido en que se dice, por ejemplo, "esto es potencialmente una estatua, y después será una estatua", pues no hay un infinito tal que después sea en acto.»

— ARISTÓTELES, EN *FÍSICA*, HABLANDO DEL INFINITO.

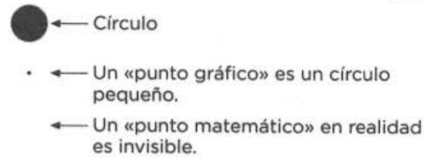
En primer lugar, en el Libro III de su *Física*, Aristóteles dice que es inadmisible aceptar la existencia del infinito en acto porque no hay en el universo un cuerpo cuyo volumen sea infinito en acto, o un intervalo de tiempo cuya longitud sea actualmente infinita. En una palabra, porque no existen magnitudes que sean infinitas en acto. Aristóteles justifica esta inexistencia mediante argumentos filosóficos. Sin embargo, no necesitamos explayarnos aquí en ellos ya que, como dijimos más arriba, la física moderna le da la razón. Por ejemplo, si el universo tiene un volumen que es solamente infinito en potencia, entonces no puede contener en su interior un cuerpo cuyo volumen sea infinito en acto.

Dado que no existen magnitudes infinitas, tampoco tiene sentido hablar de «números infinitos en acto» o de «cantidades infinitas en acto», pues esas cantidades infinitas no medirían nada en absoluto, carecerían de todo sentido.

Comparemos estos argumentos aristotélicos (que, como dijimos, dominaron el pensamiento occidental durante milenios) con la carta que citamos al comienzo del capítulo, en la que Cantor le decía a Dedekind que había podido alcanzar las «aclaraciones más notables e inesperadas» en la teoría de los números infinitos. Esta contradicción con las ideas de Aristóteles nos da un primer atisbo de por qué la teoría de Cantor fue tan revolucionaria y resistida.

El segundo argumento que vamos a comentar, que Aristóteles expone en el Libro VIII de su *Física*, afirma que no es cierto que un segmento esté formado por una cantidad infinita de puntos. Aristóteles plantea una justificación filosófica para esta afirmación, pero podemos traducirla a un razonamiento matemático.

FIG. 2



Aclaremos que cuando decimos «punto» nos referimos a un «punto matemático», es decir, un objeto que carece de longitud, anchura y altura. El «punto ortográfico» que el lector puede ver al final de una oración en una página impresa no es un punto matemático, en realidad es un círculo muy pequeño o, más exactamente, un cilindro de tinta de base muy reducida, pero no nula, y de altura pequeñísima, pero tampoco nula (figura 2).

Entonces, un punto matemático tiene, por definición, una longitud que es exactamente igual a cero. Si reunimos muchos puntos, la longitud total que obtendremos será 0 + 0 + 0 + 0 +... Pero, no importa cuántas veces sumemos cero, ya sea una cantidad finita o infinita de veces (aun si esto último fuera posible), la longitud total que obtendremos seguirá siendo siempre cero. En conclusión, si un segmento estuviera formado por puntos, su longitud total sería cero. Pero sabemos que las longitudes de los segmentos no son iguales a cero, y por lo tanto no pueden estar formados por puntos. Volveremos a esta paradoja en el capítulo 3; allí veremos qué es lo que tiene que decir al respecto la teoría de Cantor.

Como consecuencia de este razonamiento, sería imposible dividir un segmento en una cantidad infinita de partes. Tomemos, por ejemplo, un segmento de 10 cm de longitud. Si lo dividimos en 10 partes iguales, cada una de ellas medirá 1 cm. Si lo dividimos en 100 partes iguales, cada una medirá 0,1 cm. Si lo dividimos en 1 000 partes iguales, cada una medirá 0,01 cm de longitud. Pero si lo dividiéramos en una cantidad infinita de partes iguales, cada una de ellas mediría 0 cm; es decir, el segmento estaría formado por partes de longitud exactamente cero. Pero ya vimos que esto

NÚMEROS PERFECTOS

Una conjetura es una afirmación matemática de la que todavía no se sabe si es verdadera o falsa; muchas conjeturas se relacionan directamente con el infinito, un ejemplo es la conjetura de los números perfectos. Un número perfecto es un número que es igual a la suma de sus divisores (incluido el 1, pero sin incluir al número en sí). Por ejemplo, el 6 es perfecto, ya que sus divisores son 1, 2 y 3, y 6 = 1+2+3; otro número perfecto es 28 = 1+2+4+7+14. La conjetura, aun no demostrada ni refutada, dice que existen en realidad infinitos números perfectos.

último es imposible; por lo tanto, no se podría dividir un segmento en infinitas partes.

Aristóteles dice que este último argumento niega el infinito por división (no se puede dividir un objeto en infinitas partes), mientras que el argumento de las magnitudes infinitas que vimos antes niega el infinito por adición (no hay cantidades infinitamente grandes). En todos los casos, Aristóteles concluye que el infinito en acto no existe.

EL INFINITO DE GALILEO

A partir de la Edad Media, el rechazo aristotélico al infinito en acto adquirió además una dimensión religiosa. Por ejemplo, en el siglo V, san Agustín en *La ciudad de Dios*, su obra más famosa, argumenta que la divinidad, como Ser omnisciente, conoce la totalidad de los números naturales y que afirmar lo contrario es «hundirse en un remolino de impiedad». Y agrega que «la infinitud del número no es incomprensible para aquel cuya inteligencia no tiene límite». Es decir, el infinito en acto existe, pero su conocimiento está reservado a la inteligencia ilimitada de Dios; luego, pretender que la mente humana pueda comprender el infinito sería equipararla con la mente divina y, por lo tanto, una herejía.

Georg Cantor, que era un hombre muy religioso, tenía bien presente esta cuestión y, como veremos más adelante, le pesaba en su ánimo al momento de desarrollar su teoría matemática del infinito en acto.

Avancemos algunos años y consideremos ahora los *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* (1638), de Galileo Galilei (1564-1642). Como su nombre indica, la obra está escrita en forma de diálogo; los que conversan en ella son tres personajes, Salviati, que expresa las ideas del propio Galileo, Sagredo, un hombre culto de la época, y Simplicio, que expone las ideas del saber tradicional, especialmente las basadas en la obra de Aristóteles.

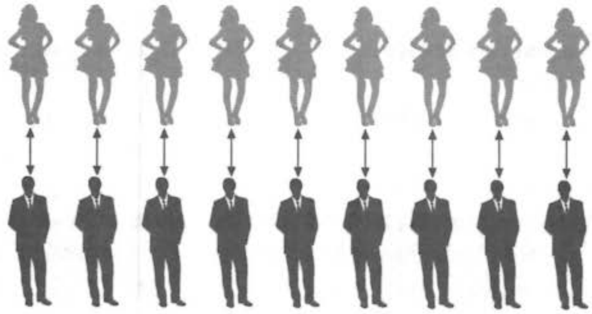
Las dos nuevas ciencias a las que se refiere el título son la estática y la dinámica, y el libro en su conjunto es una crítica a las leyes aristotélicas del movimiento. Pero, aunque Galileo se dedica a demoler buena parte de la física de Aristóteles, mantiene sin embargo la suspicacia aristotélica hacia el infinito en acto. Veamos sus argumentos, que nos interesan especialmente porque de alguna manera prefiguran ideas posteriores de Cantor.

Para comenzar, imaginemos un enorme salón de baile en el que hay una cantidad grande, aunque finita, de hombres y mujeres (figura 3). E imaginemos también que queremos saber si en ese salón hay más hombres que mujeres, o si hay más mujeres que hombres, o si hay la misma cantidad de ambos.

FIG. 3



FIG. 4



Una manera de resolver la cuestión es contar cuántas mujeres hay en el salón, después contar los hombres y finalmente comparar ambas cantidades. Dado que las cantidades involucradas son finitas, esto puede hacerse sin problemas. Pero hay una manera más ingeniosa de obtener la respuesta, que consiste simplemente en poner música e invitar a todos los presentes a bailar en parejas (figura 4). Para que nuestro razonamiento sea válido, cada pareja de baile deberá estar formada por un hombre y una mujer.

Si cada hombre logra formar pareja con una mujer, y ninguna mujer ni ningún hombre quedan solos, entonces podremos afirmar que en el salón hay la misma cantidad de hombres que de mujeres. Por el contrario, si todas las mujeres están bailando y quedan, no obstante, hombres solos, entonces podremos decir que hay más hombres que mujeres. Para finalizar, si todos los hombres están bailando, pero quedan mujeres solas, entonces podremos afirmar que hay mayor cantidad de mujeres que de hombres.

En resumen, si tenemos dos colecciones finitas y podemos emparejar cada miembro de una colección con exactamente un miembro de la otra, de modo que no sobre ninguno, entonces podemos asegurar que las dos colecciones tienen exactamente la misma cantidad de miembros. ¿Podemos extender esta idea a colecciones infinitas?

«EL LIBRO DE ARENA»

El libro de arena es un cuento del escritor argentino Jorge Luis Borges, y está incluido en el volumen del mismo nombre publicado en 1975. En el cuento, el narrador —el propio Borges— adquiere de un vendedor ambulante un libro que, según descubre, tiene infinitas páginas. El libro no tiene comienzo ni fin y cuando se ha visto una página es imposible volver a encontrarla. Asustado por este objeto que él considera monstruoso, Borges piensa en quemarlo, pero teme que la combustión de un libro infinito sea «parejamente infinita» y sofoque de humo a todo el planeta, por lo que finalmente lo esconde al azar en medio de todos los libros de la Biblioteca Nacional de Buenos Aires.



Jorge Luis Borges en 1976.

Galileo, a través de las palabras de Salviati, considera dos colecciones en particular: por un lado, la que está formada por los números naturales, 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., y por otro, la colección de los números cuadrados, que son aquellos que se obtienen multiplicando cada número natural por sí mismo, 0, 1, 4, 9, 16, 25,... Es evidente, dice Galileo, que los números cuadrados y los no cuadrados, todos reunidos, son más que los números cuadrados por sí solos.

En consecuencia, parece obvio que en la primera colección hay más números que en la segunda. En realidad, Galileo comienza a contar desde el 1 y no desde el 0 como hicimos nosotros, pero eso no cambia la esencia del razonamiento.

Pero, por otra parte, sigue diciendo Galileo, es posible emparejar perfectamente cada número de la primera colección con un número de la segunda. Para lograrlo, basta asociar cada número natural con su cuadrado:

Naturales		Cuadrados
0	⟷	0
1	⟷	1
2	⟷	4
3	⟷	9
4	⟷	16
5	⟷	25
6	⟷	36
	....	

Este emparejamiento nos diría que hay la misma cantidad de cuadrados que de números naturales, contradiciendo lo que dijimos antes en el sentido de que hay más naturales que cuadrados. Entonces, ¿hay más naturales que cuadrados o hay la misma cantidad? ¿Cómo resolvemos esta paradoja? La respuesta de Galileo es:

> Los atributos de «igual», «mayor» y «menor» no tienen lugar en los infinitos, sino solo en las cantidades limitadas [o sea, finitas].

En otras palabras, su conclusión es que es absurdo comparar colecciones infinitas y que es inaceptable decir de un infinito que es igual, menor o mayor que otro infinito. No obstante, unos 250 años más tarde, Georg Cantor se atrevió a medir y a comparar colecciones infinitas, y a sacar de esta comparación algunas conclusiones que seguramente tanto Galileo como Aristóteles habrían considerado inadmisibles. Hablaremos de este tema en el próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

Cardinales

Aristóteles, Galileo y otros muchos pensadores anteriores al siglo XIX estaban de acuerdo en afirmar categóricamente que no tiene ningún sentido hablar de la cantidad de miembros de una colección infinita. En la década de 1870, esas ideas eran todavía tan dominantes que la más elemental prudencia habría indicado que no convenía cuestionarlas seriamente, y mucho menos en un artículo científico. Sin embargo, en 1874 Cantor introdujo por primera vez el concepto de «cantidad de elementos de un conjunto infinito», y a ese concepto le dio el nombre de «cardinal de un conjunto».

Después de haber obtenido su doctorado, y mientras aún residía en Berlín, Cantor publicó tres artículos en la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* («Revista de matemáticas y física»), uno de ellos en el año 1868 y los otros dos en 1869. El primero es un trabajo sobre un tema muy clásico de aritmética, resuelto mediante métodos que ya en aquella época no eran novedosos, pero en los otros dos artículos Cantor comenzaba a tomar el camino que terminaría por llevarlo a la teoría del infinito.

Esos dos trabajos de 1869 se dedican a temas vinculados con el cálculo. El primero de ellos llevaba por título «Über die einfachen Zahlensysteme» [Sobre los sistemas numéricos sencillos] y estudiaba una propiedad de los números irracionales (hablaremos de los números irracionales más adelante en este mismo capítulo). El segundo artículo, «Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte» [Dos teoremas sobre la descomposición de ciertos números en productos infinitos], trataba, como su título indica, de la posibilidad de pensar en determinados números como el resultado de una cantidad infinita de multiplicaciones.

Los «productos infinitos» del título constituyen un tema que cae de lleno dentro del cálculo, aunque conviene aclarar que nos estamos refiriendo en realidad a un infinito en potencia. Por ejemplo, si multiplicamos 0,5 por sí mismo «infinitas veces» el

resultado es 0, pero esta afirmación debe entenderse en el sentido de que cuantas más veces multipliquemos 0,5 por sí mismo, más próximos estaremos del número 0. En efecto, si multiplicamos 0,5 dos veces, el resultado es 0,25; multiplicado tres veces nos da 0,125; cuatro veces da 0,0625, y así sucesivamente, cada vez más cerca de 0. Se trata, como se ve, de una idea relacionada con aproximaciones sucesivas, y no con el producto de infinitos 0,5 en acto.

«Hoy en día las demostraciones de Cantor son universalmente reconocidas entre las más brillantes y bellas de la historia de las matemáticas.»

— **Martin Gardner en *Carnaval matemático* (1975).**

Mientras publicaba estos artículos, Cantor se ganaba la vida dando clases de matemáticas en una escuela para señoritas, a la vez que trabajaba en su tesis de habilitación —*Habilitationsschrift* en alemán—, un grado posdoctoral que era requisito indispensable para ejercer como profesor universitario. La *Habilitationsschrift* de Cantor, escrita en latín, se tituló «De transformatione formarum ternariarum quadraticorum» [La transformación de las formas cuadráticas ternarias].

El mayor deseo de Cantor era trabajar en la Universidad de Berlín o en la de Gotinga, pero debió conformarse con un puesto en la Universidad de Halle, donde comenzó a trabajar en 1869; Halle era una institución con un pasado distinguido, pero que en el siglo XIX era considerada de segundo orden. Durante el resto de su carrera, Cantor no abandonó los intentos de pasar a Berlín o a Gotinga, pero todos ellos fracasaron y ello fue para él un motivo de frustración constante y una de las causas de las profundas depresiones que sufriría en años posteriores.

En Halle, bajo la dirección de Heinrich Eduard Heine, Cantor orientó definitivamente sus investigaciones hacia el cálculo, y entre 1870 y 1872 publicó cinco artículos, de los que hablaremos en detalle en el próximo capítulo, y en los que estudiaba cierto tipo de sumas infinitas, aunque estas sumas, como los productos

infinitos que se han tratado con anterioridad, deben entenderse en potencia, nunca en acto.

Sin embargo, aunque el infinito en acto no se mencionaba en ellos, fue como consecuencia de esos primeros trabajos en Halle que comenzó a tomar forma en la mente de Cantor la idea de trabajar con el infinito actual. La primera aparición de ese concepto en sus trabajos científicos, aunque de manera muy disimulada, ocurrió en el artículo publicado en 1874 del que hablamos sucintamente en el capítulo anterior y al que volveremos en breve.

Además de la publicación ya mencionada, que marcó un quiebro en su carrera, el año de 1874 trajo un acontecimiento muy importante para la vida personal de Cantor; el 9 de agosto se casó con Vally Guttmann, quien, como el propio Georg, era amante del arte y, además, había estudiado piano y canto. Pasaron su luna de miel en Interlaken, una ciudad turística de Suiza, y vale la pena mencionar, para comprender mejor el carácter de nuestro protagonista, que Cantor dedicó buena parte de ese tiempo a sostener discusiones matemáticas con Dedekind.

Vally Guttmann y Georg Cantor tuvieron seis hijos, cuatro niñas y dos niños, y el espíritu alegre de Vally, un complemento importante para el carácter serio y adusto de Cantor, marcó el ambiente de su hogar, en el que, tal como era usual en aquella época en la casa de un profesor universitario alemán, se llevaba una muy activa vida social.

EL INFINITO DE CANTOR

Pasemos ahora a analizar el artículo que publicó Cantor en 1874 en el *Journal* de Crelle y que llevaba por título «Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen» [Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos]. Este trabajo contenía algunas de las ideas básicas de la que más tarde llegaría a ser su teoría del infinito, aunque, como ya mencionamos en el capítulo anterior, Karl Weierstrass le aconsejó que las disimulara y que, sobre todo, no pusiera de

manifiesto las consecuencias revolucionarias que se derivaban de ellas.

¿De qué hablaba exactamente ese artículo de Cantor? ¿Qué ideas contenía? ¿Por qué sus consecuencias eran tan provocativas? Además, al ver el título del trabajo podría surgirnos también otra pregunta: ¿qué son los números reales algebraicos? En las líneas que siguen nos dedicaremos a responder todas estas cuestiones. Mostraremos primero las ideas implícitas en ese artículo de 1874, las mismas que Weierstrass le aconsejó a Cantor que ocultara, veremos cómo se las arregló Cantor para que quedaran disimuladas en el texto y finalmente explicaremos sus revolucionarias consecuencias.

Comencemos nuestro análisis por una de las primeras definiciones de la teoría de Cantor.

Esta definición dice que dos colecciones de objetos son coordinables si es posible emparejar a cada miembro de una de ellas exactamente con un miembro de la otra, sin que sobre nada por ninguna de ambas partes; tal como vimos en el capítulo anterior que hizo Galileo con la colección de los números naturales y la de los números cuadrados (véase el esquema, a modo de recordatorio):



En lenguaje matemático, a esta operación de emparejamiento se la llama «establecer una correspondencia uno-a-uno» entre los miembros de las dos colecciones.

Observemos que si las dos colecciones son finitas, entonces, como ya se planteó en el capítulo 1 en el ejemplo de las parejas de baile, decir que dos colecciones son coordinables equivale a decir que tienen la misma cantidad de miembros.

La teoría de Cantor se basa en la idea de que, contrariamente a lo que pensaba Galileo, es posible extrapolar este concepto a colecciones infinitas en acto sin que haya en ello ninguna contradicción.

> «Los problemas del infinito han desafiado la mente del hombre, y encendido su imaginación como ningún otro problema del pensamiento humano.»
>
> — EDWARD KASNER Y JAMES NEWMAN EN *MATEMÁTICAS E IMAGINACIÓN* (1940).

¿Podemos decir entonces que si dos colecciones son coordinables, entonces tienen la misma cantidad de miembros? Esa es exactamente la intención de Cantor.

Sin embargo, hablar de la «cantidad de miembros» de una colección que es infinita en acto se presta a confusión porque, como diría Aristóteles, no hay número que exprese esa cantidad, o al menos no lo había a mediados de la década de 1870 (más adelante, como ya veremos, sí lo hubo; observemos además que el conocido símbolo ∞, introducido por el matemático inglés John Wallis en 1655, representa un infinito en potencia, no en acto). De modo que Cantor se vio obligado a crear el concepto de «cardinal», que viene a representar la idea de cantidad de miembros de una colección finita o infinita en acto, pero sin hablar explícitamente de cantidades. En realidad, Cantor usó la palabra «potencia», pero los matemáticos posteriores la cambiaron por «cardinal», que es el término que se usa actualmente, y usaremos también nosotros, para representar el concepto definido por Cantor.

El cardinal de una colección es, para Cantor, la característica de ella que subsiste si se hace abstracción de la naturaleza de los miembros de la colección así como de las relaciones que hubiera entre ellos.

Por ejemplo, si hablamos de la colección formada por las letras de la palabra «cielo», su cardinal, según la definición de Cantor, podría escribirse como *****, los símbolos representan a los miembros de la colección haciendo abstracción de su naturaleza. El cardinal de la colección formada por los números 2, 3, 5, 7 y 11 sería también *****.

Ambas colecciones tienen el mismo cardinal precisamente porque tienen la misma cantidad de miembros (cinco miembros, obviamente). De hecho, ***** puede pensarse perfectamente como una forma, quizá primitiva pero válida, de designar al número cinco.

«La intuición nos dice que debería haber el doble de números naturales que de pares, pero la correspondencia uno-a-uno nos dice que hay los mismos números en cada colección.»

— Bryan H. Bunch en *Matemática insólita. Paradojas y paralogismos* (1982).

El cardinal de la colección de los números naturales sería: ***********... (los símbolos siguen infinitamente), que es también el cardinal de la colección de los números cuadrados. Podemos decir entonces, siguiendo a Cantor, que si dos colecciones son coordinables, entonces tienen el mismo cardinal.

¿Cómo supera la teoría de Cantor la paradoja de Galileo tratada en el capítulo 1? Recordemos que la paradoja de Galileo dice que, por una parte, es evidente que hay más números naturales que cuadrados porque los naturales abarcan a los cuadrados y a los no cuadrados todos reunidos; pero, por otro lado, la correspondencia uno-a-uno entre las dos colecciones nos diría que hay la misma cantidad de ambos números.

La respuesta de Cantor es que la primera mitad de la afirmación de Galileo es falsa. Sí es cierto que la colección de los números cuadrados es solo una parte de la colección de los números naturales, pero es incorrecto deducir de este hecho que hay más naturales que cuadrados.

Cuando se trata de colecciones infinitas, el todo no es necesariamente mayor que la parte; es decir, para las colecciones

infinitas en acto no valen siempre las mismas reglas que para las colecciones finitas. Los cuadrados están incluidos entre los naturales, pero al mismo tiempo ambas colecciones tienen el mismo cardinal y ello no implica paradoja alguna.

Basado en estas reflexiones, algunos años más tarde, el matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) propuso una definición alternativa del infinito en acto. En lugar de tomar el concepto negativo según el cual una colección es infinita cuando no es finita, Dedekind propuso definir la idea de colección infinita en acto mediante una propiedad positiva.

Para Dedekind, una colección infinita en acto debía definirse como aquella que es coordinable con alguna parte de sí misma (propiedad que, en efecto, tienen todas las colecciones infinitas en acto y solamente ellas). La idea de Dedekind fue aceptada y su definición es la que se usa en la actualidad en los trabajos sobre el infinito matemático.

En capítulos posteriores veremos cómo la teoría de Cantor responde a las objeciones de Aristóteles tratadas en el capítulo anterior y cómo Cantor, el ser humano, se enfrentó a la cuestión religiosa planteada por san Agustín.

ENTEROS Y RACIONALES

Sigamos avanzando en el estudio de las ideas que estaban implícitas en el artículo de Cantor de 1874. Ya sabemos que la colección formada por todos los números naturales es coordinable con la colección de los números cuadrados. Pasemos ahora a considerar los enteros.

La colección de los números enteros incluye a los naturales y también a los números negativos –1, –2, –3, –4,... Sucede que esta colección, como la de los cuadrados, también es coordinable con los naturales. Para probarlo, bastaría con mostrar una correspondencia uno-a-uno entre ambas colecciones.

Supongamos que emparejáramos al 0 consigo mismo, al 1 con el –1, al 2 con el –2, al 3 con el –3, y así sucesivamente:

Naturales		Enteros
0	⟷	0
1	⟷	-1
2	⟷	-2
3	⟷	-3
4	⟷	-4
5	⟷	-5
6	⟷	-6
	....	

Este intento en realidad sería fallido porque en la columna de la derecha no aparece la colección completa de los números enteros, en otras palabras, hay enteros que no tienen pareja. Pero que haya una solución errónea no significa que no exista un emparejamiento correcto.

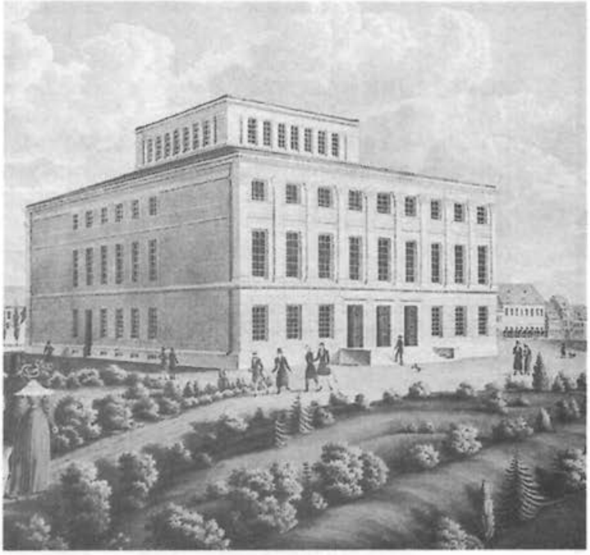
En efecto, si asociamos a los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... respectivamente con los enteros 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3,... entonces sí habremos logrado una correspondencia uno-a-uno entre los enteros y los naturales:

Naturales		Enteros
0	⟷	0
1	⟷	1
2	⟷	-1
3	⟷	2
4	⟷	-2
5	⟷	3
	....	

El cardinal de los enteros es también ***********...

La siguiente colección que nos interesa estudiar es la que está formada por los números racionales. La palabra «racionales» viene, obviamente, de «razón», que en matemáticas es sinó-





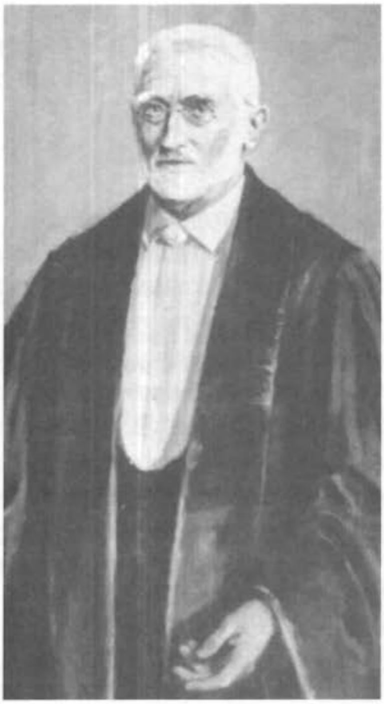




FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Georg Cantor hacia 1870, a su llegada a la Universidad de Halle.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
La Universidad de Halle hacia 1936.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Richard Dedekind retratado en 1927 por Heinrich Koenigsdorf.

FOTO INFERIOR DERECHA:
Retrato de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass por el pintor alemán Conrad Fehr.

EL HOTEL DE HILBERT

El matemático alemán David Hilbert (1862-1943) concibió una historia ficticia que sirve para ejemplificar una de las consecuencias de la teoría de Cantor, conocida como la historia del hotel de Hilbert. Imaginemos, dijo Hilbert, un hotel en el que hay infinitas habitaciones designadas respectivamente con los números 1, 2, 3, 4, 5,... y que en cada habitación hay una persona, a quienes, para mayor comodidad, identificaremos también con los números 1, 2, 3, 4, 5,... En un momento dado llega al hotel un nuevo cliente, al que llamaremos persona 0, pero en la recepción le dicen que no podrán alojarlo porque todas las habitaciones están ocupadas y además una regla del hotel establece que dos personas no pueden ocupar una misma habitación. Parece que la persona 0 tendrá que irse, pero entonces alguien propone la siguiente solución: que la persona 0 ocupe la habitación 1, que la persona 1 pase a la habitación 2, la persona 2 pase a la 3, y así sucesivamente. De este modo, la persona 0 puede ingresar en el hotel y nadie se queda sin alojamiento:



Traducida al lenguaje matemático, esta historia demuestra que la colección de los números 0, 1, 2, 3, 4,... es coordinable con la colección formada por los números 1, 2, 3, 4, 5,... En realidad, un argumento similar al que se muestra en la historia permite probar que cualquier colección infinita a la que se le haya agregado un elemento nuevo es coordinable con la colección original.

nimo de «cociente» o «división», y como este nombre sugiere, los números racionales son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros (a estos cocientes se les llama también «fracciones»).

Por ejemplo, son racionales los números

$$\frac{1}{2}=0{,}5,\ -\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=-0{,}666...\text{ y }\frac{11}{4}=2{,}75.$$

Los enteros son también números racionales ya que, por ejemplo: 3/1=3 y 0/1=0 (la expresión 0/0 no representa ningún número racional, así como tampoco 1/0, 2/0, 3/0...).

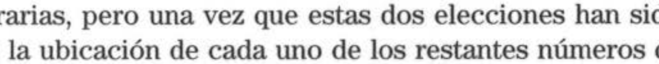
Podemos comprobar entonces que la colección de números racionales incluye a la de los números enteros, que a su vez incluye a la de los naturales. Sin embargo, hay una diferencia fundamental entre la colección de los números racionales, por un lado, y las colecciones de los naturales y los enteros, por el otro. Para entender esta diferencia debemos hablar de la recta numérica.

La recta numérica es, como su nombre indica, una recta (que en este caso puede pensarse indiferentemente como infinita en potencia o en acto) en la que se representan los números. Para ello comenzamos eligiendo un punto cualquiera al que se le asigna el número 0, y otro punto cualquiera al que se le asigna el número 1:

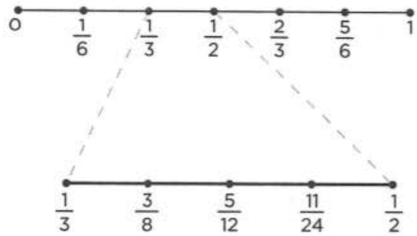


A cada número le corresponde en realidad un punto matemático de longitud cero, pero, para hacerlo visible, aquí lo representamos mediante un pequeño círculo.

Las elecciones de los puntos correspondientes al 0 y al 1 son arbitrarias, pero una vez que estas dos elecciones han sido hechas, la ubicación de cada uno de los restantes números queda totalmente fijada. Por ejemplo, las posiciones de los demás números enteros quedan determinadas por el hecho de que la distancia entre el 0 y el 1 debe ser la misma que la distancia entre el 1 y el 2, y la misma que entre el 2 y el 3, y así sucesivamente; y de manera similar para los negativos:



También queda determinada la posición de cada número racional. Por ejemplo, si dividimos al segmento entre 0 y 1 en seis partes iguales, a la primera marca después del 0 le corresponde el número 1/6, a la segunda marca le corresponde el 2/6 (nótese que 2/6 = 1/3), a la tercera, el 3/6 (que es igual a 1/2), y así sucesivamente:



¿Hay algún número racional entre 1/3 y 1/2? La respuesta es sí, porque está, por ejemplo, el promedio de ambos, que es 5/12. ¿Y entre 1/3 y 5/12? Entre ambos está su respectivo promedio, que es 3/8. Así, sin importar lo cerca que estén uno del otro, entre dos números racionales siempre hay otros números racionales.

Una consecuencia de este hecho —y esta es la diferencia entre racionales y enteros referida anteriormente— es que cualquier segmento de la recta numérica, no importa lo pequeño que sea, siempre contiene infinitos números racionales. Obviamente, esta propiedad no vale para los naturales ni para los enteros. Podríamos decir entonces que, de alguna manera, los racionales tienen en la recta numérica una mayor presencia que los naturales y, a pesar de ello, existe una correspondencia uno-a-uno entre las dos colecciones.

Para explicar cómo se logra esta correspondencia (que fue hallada por primera vez por Cantor), comencemos por colocar en una línea a las fracciones que están formadas por dos números naturales. Escribimos primero la única fracción en la que la suma de sus dos componentes es 2, que es la fracción 1/1. Seguimos con las dos fracciones en las cuales la suma es 3, que son 1/2 y 2/1. Luego, las fracciones en las que la suma es 4, que son 1/3 y 3/1, omitimos la fracción 2/2 porque 2/2 = 1/1, que ya había sido escrita antes. Continuamos con las fracciones donde la suma es 5, luego con las que suman 6 y así sucesivamente, omitiendo siempre las fraccio-

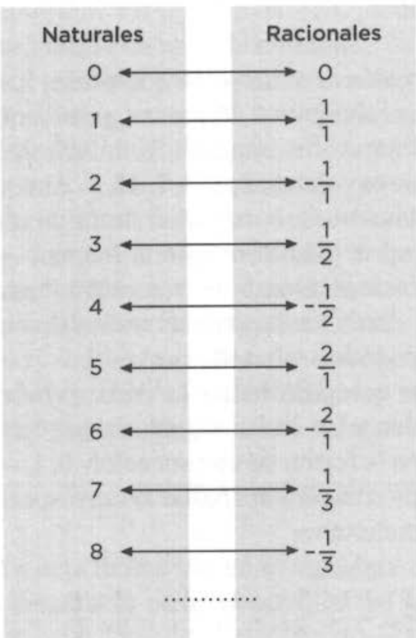
nes que sean iguales a alguna que haya sido anotada previamente. La línea resultante comienza de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5},\ldots$$

Prolongando la línea suficientemente, cualquier racional positivo acabará por aparecer en ella (estamos pensando en la línea como infinita en potencia). Para incluir a los demás racionales, ponemos al 0 delante e intercalamos positivos con negativos:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3},\ldots$$

Una vez hecho esto, para completar la correspondencia, al primer número de la línea lo emparejamos con el 0, al segundo con el 1, al tercero con el 2, y así sucesivamente:



De este modo, queda probado que hay una correspondencia uno-a-uno entre la colección de los números naturales y la colección de los números racionales.

Ahora bien, siguiendo el consejo de Weierstrass, en su artículo de 1874 Cantor casi no habló de correspondencias uno-a-uno (solo mencionó el tema muy de pasada) y ni siquiera mencionó la idea de los cardinales. ¿Cómo pudo entonces expresar que una cierta colección de números es coordinable con la colección de los naturales? Para hablar de este concepto, Cantor se basó en una idea que ocupó siempre un lugar muy importante en su pensamiento y a la que nos dedicaremos muy especialmente en el próximo capítulo, nos referimos a la noción de sucesión.

«Habría incluido de buen grado el comentario sobre la distinción esencial de las colecciones, pero lo omití siguiendo el consejo del señor Weierstrass.»

— GEORG CANTOR, EN UNA CARTA A RICHARD DEDEKIND, 27 DE DICIEMBRE DE 1873.

En una sucesión hay un primer número, luego un segundo número, y así sucesivamente. Tenemos, por ejemplo, la sucesión de los números naturales impares, 1, 3, 5, 7, 9, 11,... y la sucesión de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11,... Aunque una sucesión podría tener solamente una cantidad finita de términos —así es como se llama a los miembros que la forman— o podría tener también términos repetidos, nosotros solo tomaremos en cuenta sucesiones que, como las mostradas en los dos ejemplos, tienen infinitos términos todos diferentes entre sí.

Observemos que para hallar la correspondencia uno-a-uno entre los naturales y los enteros debimos previamente organizar a estos últimos en la forma de una sucesión: 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3,..., y lo mismo debimos hacer para hallar la correspondencia entre los naturales y los racionales:

$$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\dots$$

Deducimos entonces que decir que una colección de números es coordinable con los naturales es lo mismo que decir que sus miembros pueden organizarse en forma de sucesión.

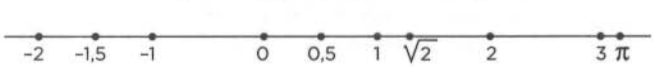
Aprovechándose de esta equivalencia, en su artículo de 1874 Cantor no habló de la propiedad de ser coordinable con los naturales, ni de tener el mismo cardinal, sino que se refirió simplemente a la posibilidad, o no, de organizar a los miembros de una cierta colección de números en forma de sucesión.

EL ARGUMENTO DIAGONAL

Volvamos ahora a la recta numérica y supongamos que ya le hemos asignado un punto al número 0 y otro al número 1. Como ya se ha dicho, a partir de estas dos asignaciones quedan totalmente determinadas las posiciones que ocupan en la recta todos los demás números racionales. Pero, ¿completan los racionales toda la recta numérica? En otras palabras, ¿todos los números pueden escribirse como cociente de enteros?

La respuesta a estas preguntas es no. Una vez ubicados todos los números racionales, quedarán todavía puntos de la recta a los que no les corresponde ningún número. Suele atribuirse a Pitágoras, en el siglo VI a.C., el descubrimiento de que existen números irracionales, es decir, números que no se pueden escribir como cociente de enteros, aunque cabe la posibilidad de que el descubridor no fuera el mismo Pitágoras, sino alguno de sus seguidores. Por ejemplo, son irracionales los números $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ y $\pi = 3{,}14159\ldots$

Los números reales son aquellos que completan toda la recta, es decir, los números reales —que incluyen a los racionales y a los irracionales— no dejan ningún punto sin asignación:



Volveremos a esta definición en el siguiente capítulo, ya que ocupa un lugar destacado en el desarrollo del pensamiento de Cantor.

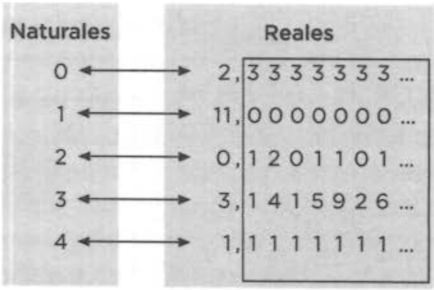
La pregunta, desde luego, es: ¿será coordinable la colección de los números reales con la colección de los números naturales (tal como lo eran las colecciones de los enteros y de los racionales)? La respuesta, uno de los descubrimientos fundamentales de Cantor, es que no, las dos colecciones no son coordinables, o sea, es imposible establecer una correspondencia uno-a-uno entre la colección de los reales y la de los naturales.

Para probarlo, no basta con mostrar un ejemplo fallido de correspondencia (ya discutimos este punto cuando hablamos de los enteros), sino que hay que ver que cualquier intento de poner en correspondencia uno-a-uno a los números naturales con los números reales fracasará. Nunca podremos lograr que cada número natural quede emparejado exactamente con un número real.

Para facilitar la explicación, mostraremos el fracaso de un intento específico de poner ambas colecciones en correspondencia uno-a-uno, pero quedará claro que la explicación es válida para cualquier otro intento, por lo que podremos asegurar que todo intento de emparejamiento fallará inevitablemente. Mostremos entonces un intento concreto de asignar un número real a cada natural y veamos cómo es posible encontrar un número real que haya quedado fuera de la asignación (en el ejemplo que sigue solo se muestran los números naturales del 0 al 4, pero la lista en realidad sigue indefinidamente):

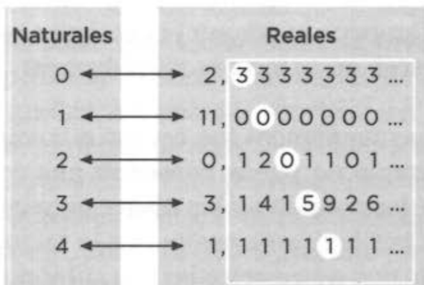
Naturales		Reales
0	⟷	2,3 3 3 3 3 3 3 ...
1	⟷	11,0 0 0 0 0 0 0 ...
2	⟷	0,1 2 0 1 1 0 1 ...
3	⟷	3,1 4 1 5 9 2 6 ...
4	⟷	1,1 1 1 1 1 1 1 ...

No está claro cuál es la regla por la que se han asignado los números, pero no es relevante porque el método que mostraremos funciona cualquiera que sea la regla de asignación. Centremos la atención en las cifras que se encuentran detrás de la coma decimal:



A su vez, dentro de ese recuadro que hemos dibujado, fijémonos en la diagonal que comienza en el extremo superior izquierdo y que va descendiendo hacia la derecha.

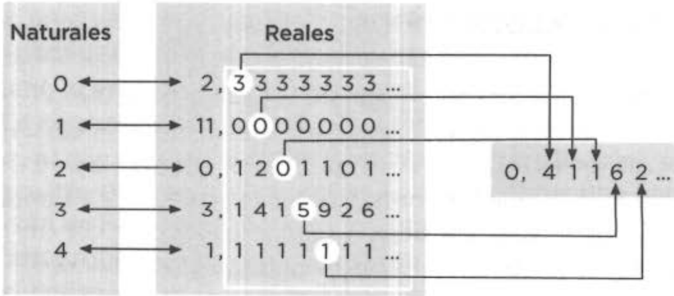
El papel destacado de esta línea de números hace que a esta demostración se la conozca bajo el nombre de «argumento diagonal»:



El número que estamos buscando (el que queda fuera de la asignación) comenzará con 0,... y sus cifras decimales estarán determinadas por los números que aparecen en la diagonal.

Para obtener la primera cifra decimal del número tomamos la primera cifra de la diagonal y le sumamos 1 (si fuera un 9, tomamos un 0). En nuestro ejemplo, el primer número de la diagonal es un 3, de modo que nuestro número empezará con 0,4...

Para obtener la segunda cifra decimal del número sumamos 1 al segundo número de la diagonal (si es un 9, tomamos un 0). Para la tercera cifra decimal usamos el tercer número de la diagonal, y así sucesivamente. En nuestro ejemplo, el número buscado comienza con 0,41162...:



El número que acabamos de calcular no está asignado a ningún natural; se nos ha pasado por alto en el emparejamiento. ¿Cómo podemos estar seguros de eso? De esta manera: el número que calculamos no puede ser el que está asignado al 0, porque ambos difieren en la primera cifra decimal. Tampoco puede ser el que está asignado al 1, porque ambos difieren en la segunda cifra decimal. Tampoco puede ser el que está asignado al 2, porque ambos difieren en la tercera cifra decimal. Y así sucesivamente.

Dado que hay un número que escapó a la asignación, entonces nuestro ejemplo no puede constituir una correspondencia uno-a-uno entre los naturales y los reales, pero cualquier otro intento fracasará por la misma razón; por lo tanto, no existe una correspondencia uno-a-uno entre las dos colecciones.

De hecho, modificando ligeramente el razonamiento anterior, es posible demostrar que si tomamos cualquier segmento de la recta numérica, no importa lo pequeño que sea (siempre y cuando no se reduzca a un solo punto), entonces la colección de los números contenidos en él no es coordinable con los naturales.

La colección de los números reales (o de los números contenidos en un segmento de la recta) no puede organizarse en una sucesión, así es como lo enunció Cantor en 1874. Un detalle que cabe mencionar es que la demostración que presentó Cantor en esa ocasión no es exactamente la misma que se ha mostrado aquí. El argumento diagonal no aparecería publicado hasta 1892, en un artículo titulado «Sobre una cuestión elemental de la teoría de conjuntos», del que hablaremos más adelante.

NÚMEROS ALGEBRAICOS

En realidad, en su trabajo de 1874, Cantor no habló de los números enteros ni de los racionales, aunque sí demostró que los números reales no pueden organizarse en una sucesión. De la otra colección de la que Cantor habló en ese artículo es de la formada por los números algebraicos, y para introducirlos debemos referirnos brevemente a un problema antiguo y muy famoso, el de la cuadratura del círculo.

Este problema, planteado por primera vez por los geómetras griegos del siglo v a.C., pide, dado un círculo cualquiera y usando solamente regla no graduada y compás, hallar un cuadrado que tenga exactamente la misma área.

La regla no graduada mencionada en el enunciado del problema es solamente un objeto rectilíneo que ayuda a trazar segmentos, pero que no tiene marcas que permitan medir (es básicamente como una regla escolar moderna, pero completamente lisa, sin inscripciones). La restricción según la cual solo se puede usar regla no graduada y compás proviene del hecho de que la geometría clásica griega solo admitía en sus construcciones el uso de esos dos instrumentos. Esto proviene a su vez de una concepción elitista según la cual el acto de medir estaba reservado a las «clases inferiores», como la de los mercaderes o los artesanos, mientras que los geómetras y los filósofos, que trataban con figuras e ideas perfectas, no se «rebajaban» a esas actividades «menores» y usaban instrumentos que trazaban las figuras más «puras» (rectas y círculos) sin medirlas.

Durante siglos hubo muchísimos intentos de hallar la cuadratura del círculo, pero todos resultaron ser erróneos. Nadie parecía capaz de encontrar una solución para el problema, aunque tampoco parecía haber un argumento que demostrara que esa solución no existía.

Ahora bien, recordemos que si r es el radio del círculo, entonces su área se calcula como $\pi \cdot r^2$, de modo que no debe sorprendernos que el número π esté relacionado con esta cuestión. En efecto, puede demostrarse que el problema de la cuadratura del círculo es equivalente a este otro problema geométrico: fijado un

segmento cualquiera como unidad de medida, construir, usando una regla no graduada y compás, un segmento cuya longitud sea π veces esa medida. Expresado más brevemente, este segundo problema pide construir un segmento de longitud π.

Que los dos problemas sean equivalentes quiere decir que si es posible construir un segmento de longitud π, entonces es también posible lograr la cuadratura del círculo, y viceversa. Por otra parte, si alguna de las dos construcciones es imposible, entonces también será imposible la otra.

El primer avance significativo en el problema se dio en el siglo XVIII cuando se demostró que para que un segmento pudiera ser construido con una regla no graduada y compás, su longitud debía ser necesariamente un número algebraico. La definición exacta de lo que es un número algebraico es un poco técnica y la omitiremos aquí, basta decir que un número es algebraico si es solución de cierto tipo especial de ecuación (un tipo de ecuación en la que intervienen números enteros). Más aún, no todos los números algebraicos pueden ser construidos con regla y compás, sino, dentro de ellos, los algebraicos que cumplen una restricción específica.

A los números que no son algebraicos se los llamó «trascendentes», un nombre que a principios del siglo XIX era meramente teórico porque, aunque se sabía que todos los números racionales son algebraicos y que algunos irracionales, como $\sqrt{2}$, también son algebraicos, no se sabía todavía si existía algún número que fuera trascendente. En particular, a principios del siglo XIX se desconocía si el número π era algebraico o trascendente.

El primer ejemplo conocido de número trascendente fue mostrado por el matemático francés Joseph Liouville en 1844. Ese número, llamado hoy en día la constante de Liouville, comienza con 0,110001000000000000000001000... (el primer 1 aparece en el lugar 1 detrás de la coma, el segundo 1 aparece en el lugar $1 \cdot 2 = 2$, el tercer 1 aparece en el lugar $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente). Liouville mostró también otros números similares a este, todos ellos trascendentes. En 1873, el también matemático francés Charles Hermite aportó un nuevo ejemplo al demostrar que el número e (la base de los logaritmos naturales) es trascendente.

LOS NÚMEROS ALGEBRAICOS

Decimos que un número es algebraico si es solución de alguna ecuación del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son todos números enteros y además se cumple que $a_n \neq 0$. Por ejemplo, 7/5 es algebraico porque es solución de la ecuación $5x - 7 = 0$; otro ejemplo de número algebraico es $\sqrt{3}$, que es solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$. Se dice que esta última ecuación es de grado 2, porque la mayor potencia de x que aparece en ella es x^2; mientras que la primera ecuación, por su parte, es de grado 1 (recordemos que $x = x^1$). Pero puede probarse que $\sqrt{3}$, además de ser solución de $x^2 - 3 = 0$, también lo es de la ecuación $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$, que es de grado 3, y también de $x^4 - 9 = 0$, que es de grado 4, y también de otra ecuación de grado 5, y otra de grado 6, y así sucesivamente; sin embargo, no es solución de ninguna ecuación que sea de grado menor que 2 y que cumpla a la vez las condiciones arriba indicadas. El menor grado posible para $\sqrt{3}$ es 2, y por eso se dice que $\sqrt{3}$ es un número algebraico de orden 2; otros números algebraicos de orden 2 son, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por otra parte, puede probarse que $\sqrt[3]{2}$ es de orden 3, que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es de orden 4 y que todos los números racionales, como es el caso de 7/5, son algebraicos de orden 1. Ahora bien, para que un segmento pueda construirse con una regla no graduada y compás su longitud debe ser un número algebraico, pero además ese número debe ser de orden 1, 2, 4, 8, 16 o cualquier otra potencia de 2. Como π no es algebraico, entonces no es posible construir con regla y compás un segmento de esa longitud, pero también es imposible construir un segmento cuya longitud sea $\sqrt[3]{2}$ porque, aunque este número es algebraico, su orden es igual a 3.

En su artículo de 1874, Cantor hizo un aporte significativo al tema, al demostrar de manera indirecta que cualquier segmento de la recta numérica contiene una infinidad de números trascendentes.

¿Cómo lo hizo? Perfeccionando el método que vimos y que nos permitió mostrar que los números racionales pueden organizarse en una sucesión, Cantor pudo probar que la colección de los números algebraicos contenidos en cualquier segmento de la recta numérica también puede organizarse en una sucesión.

Ahora bien, también vimos antes que, por el contrario, la colección de todos los números reales contenidos en ese mismo segmento no puede organizarse en una sucesión. Esto quiere decir que las dos colecciones no pueden ser la misma, porque una tiene la propiedad de poder ordenarse en una sucesión, y la otra, no. Por lo tanto, los números de cualquier segmento de la recta numérica no pueden ser todos algebraicos, tiene que haber allí necesariamente números que son trascendentes. En consecuencia, en cada segmento de la recta numérica hay algún número trascendente, de modo que en toda la recta hay infinitos números trascendentes.

Dijimos que la demostración era indirecta, con lo que se quiere hacer notar que el razonamiento de Cantor prueba que existen infinitos números trascendentes, pero no aporta ningún ejemplo específico. Si Liouville y Hermite no hubieran publicado sus resultados cuando lo hicieron y en 1874 no se hubiera conocido ni un solo ejemplo de número trascendente, entonces Cantor habría mostrado que había infinitos números de un tipo del que no se conocía ningún ejemplo. Más adelante trataremos más a fondo estas demostraciones indirectas, pero digamos por ahora que en aquel momento fueron muy cuestionadas por algunos matemáticos.

Pero, ¿qué pasó con π? En 1882, el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann demostró finalmente que π también es un número trascendente y de este modo cerró el problema de la cuadratura del círculo, que desde entonces se sabe que es completamente imposible de resolver.

LAS CONSECUENCIAS

Cerramos así nuestro estudio de las ideas contenidas en el artículo de Cantor de 1874, pero ¿cuáles eran esas consecuencias tan revolucionarias que Weierstrass le aconsejó que ocultara?

Volvamos al argumento diagonal y recordemos que en él se prueba que si intentamos establecer una correspondencia uno-a-uno entre la colección de los números naturales y la colección de los números reales entonces nuestro intento fracasará porque

siempre quedarán números reales sin pareja. Vinculémoslo con el ejemplo de las parejas de baile que vimos en el capítulo anterior; si en ese caso nos dijeran que, no importa cómo se formen las parejas, siempre quedan mujeres sin bailar, nuestra conclusión sería que hay más mujeres que hombres. De la misma forma, si siempre quedan números reales sin pareja, esto quiere decir que hay más números reales que naturales, pero no en el sentido de que una colección es parte de la otra, sino en el sentido de los cardinales. El cardinal de los números reales (su «cantidad de miembros») es mayor que el de los naturales.

Los naturales, enteros y racionales están en el mismo orden de infinitud, todos tienen el mismo cardinal. Los reales están en un orden de infinitud superior. El infinito de los reales es «más grande» que el de los naturales. Es decir, Georg Cantor no solamente osó comparar infinitos —lo que hubiera sido rechazado por Aristóteles y Galileo—, sino que además llegó a la conclusión de que había infinitos mayores que otros. Expresado en estos términos, su demostración sobre los números trascendentes sería así: la colección de los números reales tiene un orden de infinitud superior al de la colección de los algebraicos, en consecuencia, tiene que haber infinitos números reales que no son algebraicos, es decir, tiene que haber infinitos números trascendentes. Como ya dijimos, en 1874 estas ideas eran tan revolucionarias que Weierstrass le aconsejó a Cantor que las disimulara.

Pero, ¿por qué Cantor se planteó estos conceptos en primer lugar? ¿Por puro espíritu de contradicción? Como ya se ha apuntado antes, esas ideas comenzaron a estar presentes en su pensamiento como resultado de sus primeros trabajos en Halle; más aún, esas investigaciones lo llevaron casi contra su voluntad a considerar esas ideas. En efecto, en 1883, en el artículo que mencionamos al comienzo del capítulo anterior, Cantor escribió:

> Es en el transcurso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas que me he visto impulsado lógicamente casi contra mi voluntad (pues se opone a tradiciones que habían llegado a ser muy apreciadas por mí), al punto de vista de considerar lo infinitamente grande no solo en la forma de algo que crece sin límites [...], sino

> también fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma determinada de lo completamente infinito; y por ello no creo que se puedan hacer valer en contra razones que yo no estuviera en condiciones de afrontar.

¿Cuáles fueron esas investigaciones que lo impulsaron lógicamente, casi contra su voluntad, a admitir la posibilidad del infinito en acto? La respuesta a esta pregunta será uno de los temas centrales del próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

El cálculo y el infinito

La teoría del infinito matemático desafía constantemente nuestra intuición al enfrentarnos a hechos que son correctos pero que contradicen totalmente el sentido común. La teoría nos muestra que el todo no es siempre mayor que cualquiera de sus partes, o proporciona ejemplos de colecciones con diferentes «niveles de infinitud». Esta teoría se relaciona estrechamente con la rama de las matemáticas cuyos orígenes se remontan a la Antigüedad clásica: el cálculo.

Georg Cantor y Richard Dedekind se conocieron por casualidad durante las vacaciones de verano de 1872, y aunque tenían personalidades muy diferentes —Cantor era vehemente e impulsivo, mientras que Dedekind era mucho más reflexivo y reposado—, pronto descubrieron muchos puntos en común en su manera de concebir el trabajo matemático. A partir de ese encuentro, y durante más o menos una década, mantuvieron una intensa correspondencia científica y en esas cartas fueron discutidas y puestas a prueba por primera vez varias de las ideas que Cantor expuso más tarde en sus artículos.

Por ejemplo, en una carta fechada en Halle, el 5 de enero de 1874, Cantor le preguntaba a Dedekind cuál era su sensación con respecto al siguiente problema:

> ¿Es posible hacer corresponder unívocamente una superficie (digamos un cuadrado incluyendo su frontera) con una línea (digamos un segmento de recta incluyendo sus puntos extremos), de manera tal que a cada punto de la superficie le corresponda un punto de la línea, e inversamente a cada punto de la línea, un punto de la superficie?

El problema que Cantor formulaba en aquella carta era una extensión natural de las ideas en las que estuvo trabajando hasta ese momento; en efecto, en 1873 Cantor ya sabía que la colección

de los números reales tiene un cardinal mayor que la colección de los números naturales. Dicho de otro modo, sabía que los números reales tienen un orden de infinitud superior al de los números naturales, aunque no lo enunció públicamente hasta 1878, en un artículo al que nos referiremos en este mismo capítulo.

Ante esta situación, surge naturalmente la pregunta de si habrá alguna colección con un cardinal todavía mayor que el de los números reales, y esa es precisamente la pregunta que Cantor tenía en mente cuando le escribió a Dedekind la carta que antes citamos. Detengámonos, entonces, un poco en analizar cómo la pregunta de si habrá alguna colección con un cardinal superior al de los números reales lleva al problema planteado por Cantor en su carta.

En el capítulo anterior ya vimos que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real y que, recíprocamente, a cada número real le corresponde un punto de la recta. En otras palabras, hay una correspondencia uno-a-uno entre los números reales y los puntos de una recta (recordemos que otra forma de expresarlo es diciendo que esas dos colecciones son coordinables). Por lo tanto, cuando se trata de cardinales, es exactamente lo mismo hablar de los números reales que de los puntos de una recta. Entonces, ¿qué colección podríamos proponer como candidata a tener un cardinal mayor que el de los puntos de una recta? Dado que una recta es un objeto de una sola dimensión, parece razonable suponer que un objeto de dos dimensiones, es decir, una superficie, podría tener un cardinal mayor.

Ahora bien, si en realidad estamos pensando en la colección de todos los números reales, y esta se corresponde con una recta, ¿por qué Cantor habla en su carta de un segmento, que es solamente la parte de la recta comprendida entre dos puntos? La respuesta es que puede probarse que todos los segmentos, no importa su longitud, son coordinables entre sí, todos tienen el mismo cardinal, y que a su vez cualquier segmento es coordinable con la recta completa. En conclusión, cuando investigamos cardinales, es lo mismo hablar de una recta que de un segmento.

Llegamos entonces a la pregunta que Cantor formulaba en la carta del 5 de enero de 1874: ¿es posible que un objeto de una sola

dimensión (un segmento, pensado como una colección infinita de puntos) tenga el mismo cardinal que un objeto de dos dimensiones (un cuadrado, pensado también como colección infinita de puntos) o, por el contrario, el cuadrado tendrá un cardinal mayor?

> «La solución de los problemas que hasta ahora rondaban al infinito matemático es probablemente el mayor de los logros de los que nuestra época pueda enorgullecerse.»
>
> — **Lord Bertrand Russell, en 1910.**

En la misma carta donde planteaba la pregunta, Cantor decía que parece obvio que el cuadrado debe tener un cardinal mayor que el del segmento, opinión que Dedekind compartía, pero Cantor agregaba que el problema «ofrece graves dificultades». Y, efectivamente, hubo dificultades, porque Cantor tardó más de tres años en encontrar la solución, que finalmente comunicó a Dedekind en una carta fechada en Halle el 20 de junio de 1877. En su respuesta a dicha carta, escrita el día 22 del mismo mes, Dedekind hacía algunas objeciones a la argumentación de Cantor, a las que este contestó en dos cartas sucesivas escritas el 25 y el 29 de junio respectivamente. Las primeras palabras de esta última, muy representativa del estilo de Cantor, fueron:

> Sea Ud. benévolo y perdone mi afán por esta cuestión, al exigir tanto de su amabilidad y sus esfuerzos. Lo que le he comunicado recientemente es para mí mismo tan inesperado, tan nuevo, que por así decir no podré alcanzar una cierta tranquilidad de ánimo hasta haber obtenido de Ud., muy estimado amigo, una decisión sobre si es correcto. Hasta que no me dé Ud. su aprobación, solo puedo decir que: *je le vois, mais je ne le crois pas* [«lo veo, pero no lo creo», en francés en el original].

Podemos suponer que Dedekind le permitió a Cantor alcanzar esa «cierta tranquilidad de ánimo» porque su respuesta, fechada en Brunswick el 2 de julio, comenzaba así:

He revisado una vez más su demostración y no he encontrado ninguna laguna; estoy seguro de que su interesante teorema es correcto, y le felicito por él.

LA RESPUESTA

La respuesta, para sorpresa del propio Cantor, es que existe una correspondencia uno-a-uno entre los puntos de un segmento y los puntos de un cuadrado. En otras palabras, a pesar de que tiene una dimensión más, el cardinal de un cuadrado no es mayor que el cardinal de un segmento.

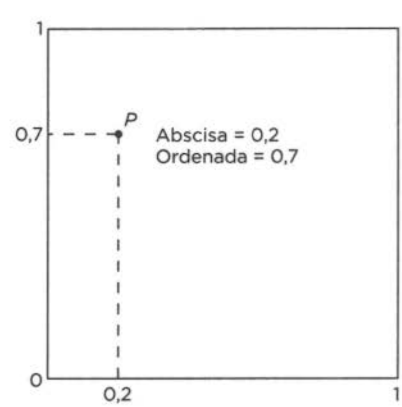
¿Cómo podemos demostrar este hecho? Un segmento, decíamos más arriba, es la parte de una recta comprendida entre dos puntos; en consecuencia, podemos equipararlo con la colección de todos los números reales comprendidos entre dos números fijos. Más aún, dado que los puntos asignados al 0 y al 1 en la recta numérica son totalmente arbitrarios, podemos equiparar a cualquier segmento con la colección de los números reales comprendidos específicamente entre 0 y 1. En la figura 1, a modo de ejemplo, se puede observar la posición que le corresponde al número 0,75.

¿Cómo representamos numéricamente los puntos de un cuadrado? Como sabemos, los puntos de un planisferio se representan mediante dos coordenadas, su longitud y su latitud; de la misma forma, los puntos de un cuadrado también tienen dos coordenadas, habitualmente llamadas abscisa y ordenada (figura 2).

FIG. 1



FIG. 2

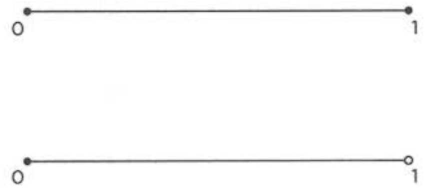


¿Cómo se determina la abscisa y la ordenada de un punto P del cuadrado? Para determinar esas coordenadas elegimos, como se aprecia en la figura 2, dos lados del cuadrado que no sean para-

SEGMENTO SIN EXTREMOS

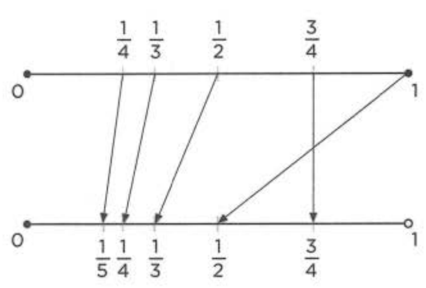
Vamos a demostrar que los números reales entre 0 y 1, ambos incluidos, son coordinables con la colección que se obtiene al quitar el 1. Gráficamente, la primera colección es un segmento con sus dos extremos incluidos, mientras que la segunda es un segmento del que se ha eliminado uno de sus extremos (figura 1). Para establecer la correspondencia (figura 2), asignamos el 1 de la primera colección al 1/2 de la segunda, el 1/2 de la primera colección es asignado al 1/3 de la segunda, el 1/3 de la primera colección al 1/4 de la segunda, y así sucesivamente; todos los demás números de la primera colección, es decir, todos los números diferentes de 1/2, 1/3, 1/4, tal como el 3/4, por ejemplo, son asignados a sí mismos. De la misma forma se puede probar que el segmento al que le falta uno de sus extremos es coordinable con el segmento al que le faltan los dos extremos. Por lo tanto, los tres segmentos, el que tiene sus dos extremos, el que le falta uno de ellos y el que carece de los dos, son todos coordinables entre sí.

FIG. 1



Gráficamente, representamos la falta del punto con un círculo sin rellenar; en realidad, la falta del punto sería completamente imperceptible.

FIG. 2



lelos entre sí, y a cada uno de ellos le asignamos, tal como hicimos con el segmento, los números entre 0 y 1; al número 0 le corresponde el vértice que es común a ambos lados.

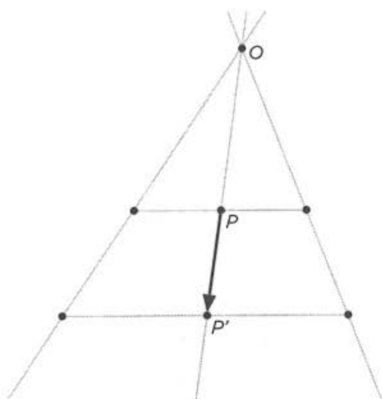
Para saber las coordenadas de un punto *P*, lo proyectamos perpendicularmente sobre cada uno de los dos lados elegidos (así como el punto de un planisferio se proyecta sobre el ecuador y sobre el meridiano de Greenwich); uno de los números que se obtiene es la abscisa de *P* y el otro es su ordenada.

Cada punto del cuadrado queda entonces determinado por un par de coordenadas y convendremos, como es usual, en mencionar siempre la abscisa en primer lugar y la ordenada en segundo, por lo que hablaremos simplemente del punto de coordenadas 0,2 y 0,7, sobreentendiendo que 0,2 es la abscisa y 0,7 la ordenada (el orden en que se mencionan los números es muy relevante, dado que el punto de abscisa 0,2 y ordenada 0,7 no es el mismo que el de abscisa 0,7 y ordenada 0,2).

El problema consiste entonces en establecer una correspondencia uno-a-uno entre los números reales comprendidos entre el 0 y el 1, y los pares de números comprendidos entre el 0 y el 1, de modo que a cada número individual le corresponda un único par y a cada par le corresponda un único número individual.

SEGMENTOS DE DIFERENTES LONGITUDES

Vamos a demostrar que dos segmentos de diferentes longitudes son coordinables entre sí. Primero trazamos dos rectas que pasen respectivamente por los extremos de los segmentos y llamamos *O* al punto donde estas rectas se cortan. Trazando nuevas rectas que pasen por el punto *O*, en la figura se muestra cómo asignar a cada punto *P* en uno de los segmentos exactamente un punto *P'* en el otro.



Veamos un ejemplo de cómo se define esta correspondencia. Supongamos que tenemos el número 0,213421342134... ¿Qué par de coordenadas le corresponde? Tomamos, por un lado, los dígitos que ocupan las posiciones impares detrás de la coma (primera, tercera, quinta, y así sucesivamente); estos dígitos son 232323... Por otro lado, tomamos los dígitos de las posiciones pares, que son 141414... El número 0,213421342134... se corresponde entonces con el par de coordenadas 0,232323... y 0,141414...

Recíprocamente, si nos dan el punto de coordenadas 0,232323... y 0,141414..., para obtener el punto del segmento que le corresponde tomamos el primer dígito de la abscisa, luego el primer dígito de la ordenada, luego el segundo de la abscisa, el segundo de la ordenada y así sucesivamente, y formamos de ese modo el número 0,21342134... (figura 3).

Para poner otro ejemplo, si nos dan el punto de coordenadas 0,2 y 0,7, escribimos primero estos números como 0,20000... y 0,70000... (el agregado de estos ceros no modifica el valor de la

FIG. 3

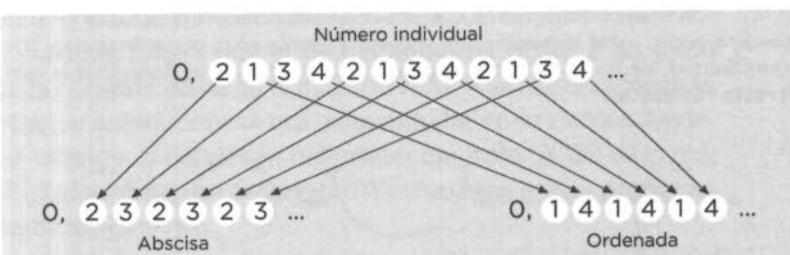


FIGURA 3: **Correspondencia uno-a-uno entre números individuales y pares de números.**

FIG. 4

Número entre 0 y 1		Abscisa	Ordenada
0,121212...	⟷	0,1111...	0,2222...
0,123123123...	⟷	0,13213...	0,21321...
0,50000...	⟷	0,5000...	0,000... = 0
0,3333...	⟷	0,333...	0,333...

FIGURA 4: **Algunos ejemplos de correspondencias entre un número entre 0 y 1 y un par de números.**

expresión); el número que corresponde a este par es entonces 0,270000..., que es simplemente 0,27. En la figura 4 (página anterior) se muestran otros ejemplos de esta correspondencia.

De este modo vemos que a cada número entre 0 y 1 le corresponde exactamente un par de coordenadas, y que a cada par de coordenadas le corresponde exactamente un número. En otras palabras, hemos establecido una correspondencia uno-a-uno entre un segmento cualquiera y un cuadrado cualquiera, por lo

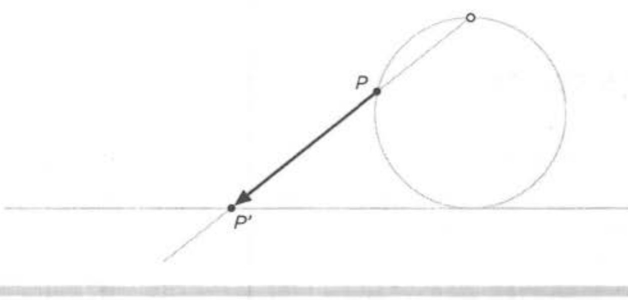
SEGMENTO, CIRCUNFERENCIA, RECTA

En la figura 1 se muestra cómo mediante el procedimiento de enrollar un segmento sin extremos podemos demostrar que este es coordinable con una circunferencia de la que hemos quitado un punto (la ausencia del punto se indica con un «circulito sin rellenar», aunque en la realidad esa ausencia sería imperceptible a simple vista). Es decir, ambas colecciones de puntos son esencialmente la misma, la única diferencia es la disposición gráfica en el plano: en un caso están en una línea recta, en el otro organizados en una curva. A su vez, en la figura 2 se muestra cómo establecer una correspondencia uno-a-uno entre una circunferencia sin un punto y la recta completa; a cada punto *P* de la circunferencia le corresponde el punto *P'* en la recta (*P* y *P'* siempre deben estar alineados con el punto faltante en la circunferencia). Por transitividad, deducimos que el segmento sin extremos es coordinable con la recta completa.

FIG. 1



FIG. 2



que podemos afirmar que ambas colecciones de puntos tienen exactamente el mismo cardinal.

Decíamos antes que cualquier segmento tiene el mismo cardinal que la recta completa; de manera similar, puede probarse que un cuadrado tiene el mismo cardinal que el plano completo. Por lo tanto, de lo que hemos demostrado más arriba podemos concluir que tanto una recta, como cualquier segmento, cualquier cuadrado y el plano completo, todos tienen el mismo cardinal. Este hecho también se extiende a objetos tridimensionales, ya que es posible demostrar que el cardinal de un segmento es igual al cardinal de un cubo, que es a su vez igual al cardinal de todo el espacio tridimensional.

Volvamos a la pregunta que había motivado el problema: ¿existe alguna colección cuyo cardinal sea mayor que el de los números reales? Por el momento, no hemos podido encontrar una respuesta; ni un cuadrado, ni el plano, ni todo el espacio tridimensional (siempre pensados como colecciones infinitas de puntos) nos dan un ejemplo en ese sentido, aunque tampoco tenemos un argumento que nos pruebe que una colección con un cardinal mayor que el de los reales no pueda existir.

En 1877, Cantor tampoco sabía si existía, o no, una colección con un cardinal mayor que el de los números reales y no pudo resolver la cuestión hasta su trabajo de 1883, tras haber alcanzado las «notables aclaraciones» que mencionaba en la carta a Dedekind que citamos al comienzo del primer capítulo. ¿Cuál es la respuesta? ¿Existe o no esa colección? Volveremos a este problema en el capítulo siguiente.

LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

La colección de los números reales tiene un cardinal mayor que el de los números naturales; la pregunta que motivó el problema anterior es si habrá una colección con un cardinal aún mayor. Pero hay otra pregunta que también surge naturalmente y es si habrá una colección con un cardinal intermedio. En otras pala-

bras, ¿habrá alguna colección con un cardinal mayor que el de los números naturales, pero menor que el de los reales?

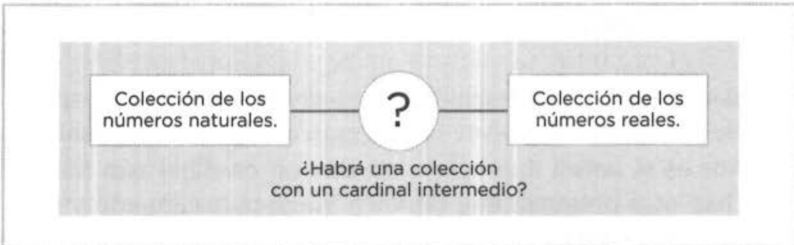
Otra forma de plantear la cuestión es la siguiente; Cantor llamaba *numerables* a las colecciones que son coordinables con la de los números naturales; así por ejemplo, la colección de los enteros y la de los racionales son ambas numerables, pero la colección de los números reales no lo es. Entonces, una manera diferente de plantear la pregunta es si habrá alguna colección infinita no numerable, pero que al mismo tiempo tenga un cardinal menor que el de los números reales.

Durante años, Cantor buscó infructuosamente un ejemplo así; las colecciones de los números naturales, enteros, racionales y algebraicos son todas numerables; los números irracionales y los números trascendentes son no numerables, pero son coordinables con los reales, y no tienen, en consecuencia, un cardinal menor que estos.

Finalmente, después de fracasar en todos los intentos de hallar una colección intermedia, en 1877 Cantor llegó a la convicción de que tal colección no existe y formuló la siguiente conjetura, que es conocida como la «hipótesis del continuo»: no existe una colección infinita con un cardinal intermedio entre el de los naturales y el de los reales (véase la figura).

Una conjetura es una afirmación matemática que se cree que es verdadera, pero que nadie ha podido todavía demostrar ni refutar. En el caso de la hipótesis del continuo, demostrarla implicaría probar que no existe una colección con un cardinal intermedio entre los naturales y los reales; refutarla implicaría hallar una colección así.

La hipótesis del continuo afirma que no existe una colección intermedia, pero en 1877 no se sabía si esto era cierto.



En 1877 Cantor estaba convencido de la verdad de la hipótesis del continuo; sin embargo, no había sido capaz de hallar una demostración. El problema le preocupó durante muchos años y en 1883, como veremos, el hallar una respuesta positiva se transformó para él en una cuestión sumamente importante. La respuesta final al problema resultó ser bastante sorprendente, como veremos más adelante.

EL SEGMENTO Y EL ESPACIO

Como ya se ha expuesto anteriormente, cualquier segmento, cualquier cuadrado y el plano completo tienen todos el mismo cardinal, y esto vale también para un cubo y para todo el espacio tridimensional.

Una consecuencia de ello es que, por ejemplo, si volvemos al segmento que dibujamos antes, el fragmento comprendido entre los números 0 y 0,0000000000001, que es un segmento de longitud pequeñísima (imposible de percibir a simple vista), tiene, en cuanto colección infinita de puntos, exactamente el mismo nivel de infinitud que todo el espacio tridimensional, aunque este último ocupe un volumen infinito en acto, es decir, un volumen infinitamente mayor que el de todo el universo (suponiendo que el universo tenga un volumen finito).

Esta conclusión, matemáticamente correcta, es sin embargo tan contraria a la intuición que resulta muy difícil de aceptar, y tanto más difícil era en la década de 1870, cuando inclusive la mayoría de los matemáticos dudaba de la existencia misma del infinito en acto.

Cantor expuso estas conclusiones en un artículo que escribió en 1877 y que tituló «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre» [Una contribución a la teoría de las variedades] («variedad» era, para Cantor, sinónimo de «colección»). En el mes de julio de ese año lo envió al prestigioso *Journal* de Crelle, la misma revista berlinesa que había publicado su trabajo de 1874, pero esta vez la situación era muy diferente.

Como vimos en el capítulo anterior, en el artículo de 1874 Cantor mostraba que los números reales no se pueden escribir en forma de sucesión y deducía de este hecho que en cualquier segmento de la recta numérica hay infinitos números trascendentes (un infinito que, en el contexto de ese artículo, podía ser interpretado como en potencia). A sugerencia de Weierstrass, la comparación de infinitos era mencionada apenas al pasar y no tenía un papel destacado; además, el concepto de cardinal ni siquiera se mencionaba.

«Las generaciones futuras contemplarán la teoría [de las colecciones infinitas] como una enfermedad de la que nos hemos recuperado.»

— Henri Poincaré, matemático francés, en 1908.

Pero el artículo escrito en 1877 era un estudio de la comparación de infinitos como tema en sí mismo y no ya como una mera herramienta para demostrar un resultado numérico. En este nuevo trabajo, Cantor comenzaba definiendo explícitamente que dos colecciones son coordinables si es posible establecer entre ellas una correspondencia uno-a-uno, definía también el concepto de cardinal y volvía al teorema de 1874 sobre los números trascendentes, pero ahora poniéndolo en el contexto de la comparación de infinitos. También demostraba que un segmento al que se le quita un punto es coordinable con el segmento completo y además probaba el hecho, ya enunciado más arriba, de que un segmento es coordinable con un cuadrado. Cantor cerraba este trabajo enunciando por primera vez públicamente la hipótesis del continuo.

El contenido de este artículo era muy controvertido para la época, motivo por el cual encontró mucha resistencia; tanto, que el 10 de noviembre de 1877 Cantor le escribía a Dedekind:

> La impresión del trabajo mío que Ud. conoce en el *Journal* de Borchardt [Carl Wilhelm Borchardt fue el editor del *Journal* de Crelle entre 1856 y 1880] se está retrasando de una manera que resulta sorprendente e inexplicable, a pesar de que lo envié ya el 11 de julio

y poco después recibí la promesa de que sería impreso lo más rápidamente posible.

Hoy he recibido a través de mi viejo amigo Lampe, que desde hace años se ocupa de revisar pruebas del *Journal*, la noticia de que B[orchardt] ha vuelto a retrasar mi nuevo trabajo, alterando con ello el orden previamente fijado, con lo que de nuevo se deja en el aire indeterminadamente su publicación. También me escribió que, por su parte, está intentando frustrar esas intenciones mediante una hábil maniobra.

Quiero pensar que lo logrará, pero en segundo lugar debo contar con la posibilidad de que no lo consiga; y en tal caso tengo la intención de retirar el trabajo totalmente de las manos del señor B[orchardt] y hacerlo imprimir en algún otro lugar.

NÚMEROS REALES SIN NOMBRE

Vamos a comentar una consecuencia muy curiosa de la teoría de Cantor. Para ello, convengamos en decir que una frase, un cálculo o cualquier otra expresión idiomática es el nombre de un número si define a ese número sin ambigüedad. Por ejemplo, «La cantidad de días de la semana» es un nombre para el número 7, y también lo es «El resultado de sumar 6 más 1». Otro ejemplo es «El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro», que es un nombre para el número π. La oración «El número que comienza con 0,110001000000000000000001000..., donde el primer 1 aparece en el lugar 1 detrás de la coma, el segundo 1 aparece en el lugar $1 \cdot 2 = 2$, el tercer 1 aparece en el lugar $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente» es un nombre del número trascendente de Liouville. Ahora bien, puede demostrarse que la colección de todos los nombres posibles es coordinable con los naturales mientras que, según sabemos, la colección de los números reales no lo es; en otras palabras, hay más números reales que nombres posibles para designarlos. Deducimos entonces que existen números reales inefables, números que no pueden ser nombrados o definidos de ninguna manera. En realidad, hay infinitos números inefables, aunque, por supuesto, es totalmente imposible dar ni siquiera un solo ejemplo de ellos, ya que cualquier número que podamos mencionar tendrá necesariamente un nombre (el nombre que usamos para mencionarlo). Este es un ejemplo de demostración de existencia pura, un razonamiento en el que se prueba la existencia de objetos, pero de los cuales es imposible mencionar ni un solo ejemplo.

Es posible que la «hábil maniobra» de Lampe haya sido en definitiva exitosa, porque el *Journal* de Crelle finalmente publicó el trabajo de Cantor en el volumen 84 del año 1878, en las páginas 242 a 258. En realidad, este fue el último artículo de Cantor que apareció impreso en el *Journal* de Crelle ya que, ofendido por la actitud de Borchardt, Cantor nunca volvió a enviar un escrito suyo a dicha revista.

EL ADVERSARIO

Aunque en su carta Cantor se queja de Borchardt, la oposición a la publicación de su trabajo en el *Journal* de Crelle estaba liderada por Leopold Kronecker, y Cantor era perfectamente consciente de ello.

Kronecker, nacido en 1823, era un matemático alemán muy respetado e influyente; sus trabajos, muy bien considerados, abarcaban el álgebra, el cálculo y la aritmética, y especialmente los puntos de contacto entre estas diferentes ramas de las matemáticas. También estudió meteorología, astronomía, química y filosofía, y en este último campo se interesó particularmente por la obra de Descartes, Leibniz, Kant, Spinoza y Hegel.

En 1861, por recomendación de Kummer y gracias a sus numerosos méritos académicos, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín, y en 1868 miembro de la Academia de Ciencias de París. Sin embargo, a pesar de su gran amplitud de intereses matemáticos, los métodos de trabajo de Kronecker estaban muy restringidos debido a su propia filosofía de las matemáticas, que suele resumirse en su famosa máxima:

> *«Die Ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Übrige ist Menschenwerk.»*
>
> «Dios creó los números enteros, todo lo demás es obra del hombre.»

Para Kronecker, la base de las matemáticas la forman los números enteros, que están dados en la naturaleza y existen inde-

pendientemente del pensamiento humano; cualquier otro objeto matemático debía ser definido de un modo preciso a partir de ellos en una cantidad finita de pasos. Es esencial aquí la idea de finitud; Kronecker estaba firmemente convencido de que el infinito en acto es un absurdo y solo aceptaba, incluso con cierta reserva, el infinito en potencia.

Por ejemplo, para Kronecker, el número trascendente de Liouville que vimos en el capítulo anterior no existía. Kronecker sí habría admitido la existencia de la sucesión potencialmente infinita que comienza con 0,1, sigue con 0,11, luego con 0,110001 y así sucesivamente, pero habría dicho que la expresión 0,110001000000000000000001000..., en la que se supone que hay infinitas cifras decimales, no representa ningún objeto matemático existente. De hecho, cuando Lindemann demostró en 1882 que π es trascendente (véase el capítulo precedente), Kronecker lo felicitó por la belleza de su argumentación, pero agregó que en realidad no probaba nada, porque los números trascendentes no existían.

«Kronecker y Kummer han caído en un punto de vista muy sesgado, casi diría *primitivo*, a la hora de juzgar la matemática.»

— Georg Cantor, en una carta a Gösta Mittag-Leffler, en agosto de 1884.

Un número racional como 0,333... sí existía para Kronecker, pero solamente porque puede definirse mediante una expresión finita construida en base a números enteros, 1/3; sin embargo, la única expresión correcta sería esta última, y no 0,333..., en la que se supone que hay infinitas cifras decimales. Kronecker fue además uno de los primeros en rechazar la validez de las demostraciones de existencia pura, en las que se prueba la existencia de objetos matemáticos, pero sin indicación de cómo hallar ni siquiera un ejemplo de ellos; una demostración así, según vimos en el capítulo anterior, es la prueba de Cantor de que existen infinitos números trascendentes.

Después de todo lo dicho, queda claro que Kronecker rechazaba de plano las investigaciones de Cantor sobre el infinito,

no porque considerara que contenían errores sino, peor todavía, porque entendía que eran un sinsentido, que hablaban de objetos inexistentes, como por ejemplo colecciones infinitas en acto o colecciones con diferentes niveles de infinitud. A consecuencia de ello, Kronecker influyó tanto como le fue posible para impedir la publicación de los trabajos de Cantor; en particular, trató de detener la publicación del artículo que este había enviado al *Journal* de Crelle en 1877.

Con el correr de los años, Kronecker llegó a tratar a Cantor públicamente de «renegado», «corruptor de la juventud» y «científico charlatán», y fue en parte responsable de que Cantor no pudiera acceder a trabajar, como siempre había sido su deseo, en universidades más prestigiosas que la de Halle, tales como las de Berlín o Gotinga.

Cantor, que era muy susceptible y propenso a la depresión, sufrió mucho a causa de estos ataques y frustraciones, que a la larga terminaron por afectar su salud mental.

LOS ORÍGENES

¿Por qué Cantor se dedicó al estudio del infinito? ¿Cuáles fueron las investigaciones científicas que lo impulsaron lógicamente, casi contra su voluntad, a considerar colecciones infinitas en acto? Para responder estas preguntas debemos remontarnos a la historia del cálculo.

Suele decirse que el cálculo es la rama de las matemáticas que se ocupa de los objetos infinitamente grandes y de los objetos infinitamente pequeños y, aunque en efecto, como veremos enseguida, el cálculo está estrechamente relacionado con lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, hay que admitir que la definición anterior es algo inexacta. La verdad es que es inevitable caer en la imprecisión cuando se pretende caracterizar a la que es en realidad una de las ramas más amplias y complejas de las matemáticas; cualquier definición que intentemos será imperfecta. Sin embargo, quizá un modo de acercarnos a una descripción mejor





Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn *Cantor* in Halle a. S.)

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$(1.)\quad a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \cdots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1.), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1.) höchstens soviel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angiebt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesammtheit einen Inbegriff von Zahlgrössen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, dass in jeder Nähe irgend einer gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, dass man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so dass zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, dass also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmässigen Reihe:

$$(2.)\quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots$$



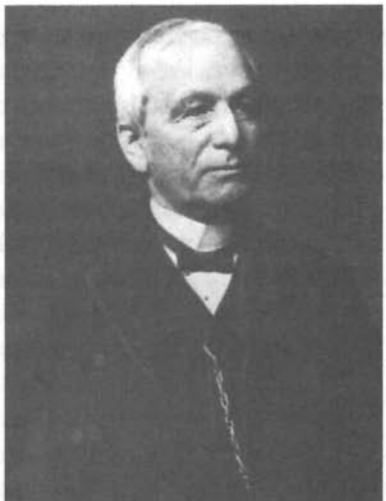


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Georg Cantor hacia 1880.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Primera página del artículo «Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos», publicado por Cantor en 1874. Este trabajo ya incluía algunas ideas básicas de la futura teoría del infinito de Cantor.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Carl Wilhelm Borchardt, editor del *Journal* de Crelle entre 1856 y 1880.

FOTO INFERIOR DERECHA:
El matemático alemán Leopold Kronecker. Su consideración de que todo teorema de existencia debía estar fundado en una construcción efectiva y ser desarrollado en un número finito de etapas, le condujo a rechazar la teoría de conjuntos propuesta por Cantor, lo que generó un abierto debate.

sea exponiendo uno de los problemas que discute y los métodos que utiliza para resolverlo.

Aunque hoy en día el cálculo tiene aplicaciones en áreas del conocimiento tan diversas como la biología, la geología o la economía, en sus orígenes estuvo estrechamente vinculado a la física y a la geometría, y dentro de esta última se ocupó, entre otros problemas, del modo de hallar el área de figuras delimitadas por una frontera curva. Nos concentraremos especialmente en esta última cuestión.

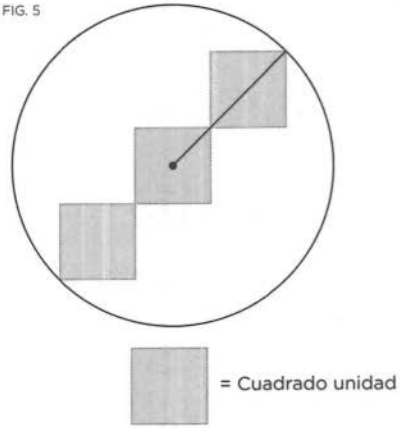
«La teoría de [las colecciones infinitas] es un campo en el que nada es evidente por sí mismo, cuyos enunciados verdaderos son a menudo paradójicos y cuyos enunciados plausibles son falsos.»

— Felix Hausdorff, matemático alemán, en 1914.

¿Cómo podemos calcular el área de un círculo? A modo de ejemplo, tomemos el círculo cuyo radio mide una vez y media la diagonal del cuadrado de 1 cm de lado (figura 5), que es la unidad de medida de área; la pregunta es: ¿cuántas veces cabe nuestra unidad de medida en ese círculo?

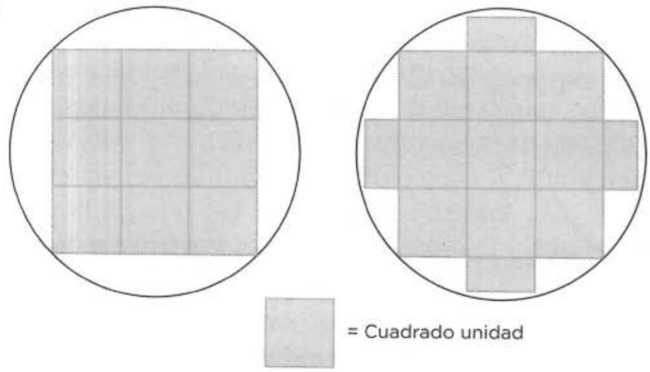
En primer lugar, como se muestra en la figura 6, es fácil comprobar que en el círculo caben nueve cuadrados de 1 cm de lado, aunque también se observa que esos cuadrados no alcanzan a completar toda la figura. Han quedado partes en blanco que también debemos cubrir, y para ello, como ya no caben más cuadrados completos, podemos usar cuatro rectángulos que sean la mitad del cuadrado unidad.

FIG. 5



Sin embargo, después de colocar esos cuatro rectángulos, todavía quedan partes sin cubrir, que habremos de llenar a su vez con más y más rectángulos de tamaño decreciente. En

FIG. 6

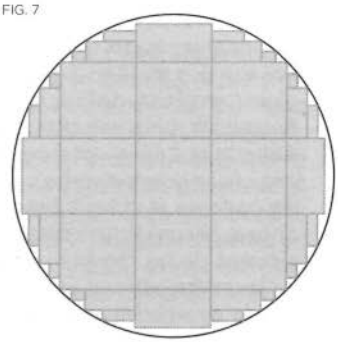


realidad, para cubrir el círculo por completo necesitaríamos una cantidad infinita de rectángulos, la mayoría de ellos de tamaño menor que microscópico (figura 7). Vemos así cómo, rápidamente, el problema de calcular el área de un círculo nos ha llevado al dominio de lo infinitamente grande (la cantidad de rectángulos necesaria para cubrir el círculo) y lo infinitamente pequeño.

Pero colocando rectángulos al azar, difícilmente llegaremos a saber cuántos cuadrados unitarios caben en el círculo. Necesitamos un modo sistemático de cubrir la figura que nos permita controlar qué fracción del círculo está siendo cubierta en cada paso; ese modo sistemático fue ideado por el geómetra griego Eudoxo de Cnido.

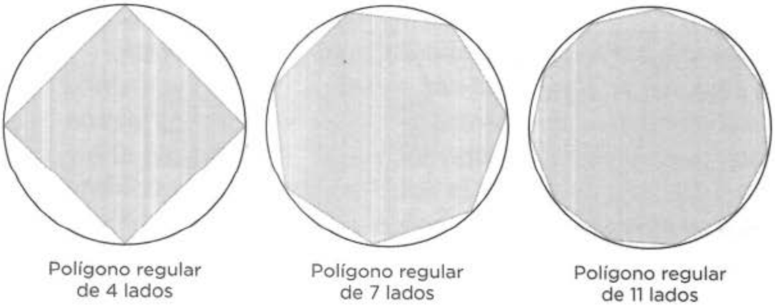
En el siglo VI a.C., Eudoxo imaginó polígonos regulares de una cantidad creciente de lados y con sus vértices ubicados en el borde del círculo (un polígono regular es aquel en el que los lados son todos iguales y forman además ángulos iguales). Cada polígono cubre una parte del círculo y, a medida que la cantidad de lados aumenta, la parte sin cubrir va haciéndose tan pequeña como se desee (figura 8, página siguiente).

FIG. 7



Basado en esta idea, y a partir de propiedades de los polígonos regulares que

FIG. 8



eran ya conocidas en aquella época, Eudoxo pudo demostrar que el área de un círculo cualquiera es proporcional al área del cuadrado construido sobre su radio. Traducido al lenguaje moderno, esto significa que si el radio del círculo mide r, entonces su área se calcula multiplicando r^2 por un cierto número fijo, un número

RICHARD DEDEKIND

Julius Wilhelm Richard Dedekind nació en Braunschweig, Alemania, el 6 de octubre de 1831. Desde niño mostró siempre un gran interés por las ciencias, que poco a poco se fue centrando específicamente en las matemáticas; es por eso que en 1848 ingresó en el Collegium Carolinum, de la cercana ciudad de Brunswick, para estudiar esa disciplina. Aunque el Collegium Carolinum no era una universidad, dictaba cursos de nivel equivalente al universitario y Dedekind obtuvo allí una educación muy sólida en algunas de las ramas más importantes de las matemáticas, entre ellas el álgebra, la geometría analítica y el cálculo.



que es el mismo para todos los círculos. En el siglo XVIII, el gran matemático suizo Leonhard Euler bautizó a ese número con la letra griega π, y es así como hoy en día decimos que el área del círculo se calcula como $\pi \cdot r^2$.

NEWTON Y LEIBNIZ

Un siglo después de Eudoxo, Arquímedes utilizó ideas similares para hallar el modo de calcular el volumen de una esfera, y también el área y el centro de gravedad de diversas figuras limitadas por curvas. Asimismo, obtuvo una de las mejores aproximaciones del valor de π conocidas en la Antigüedad.

Sin embargo, los métodos griegos, brillantes como eran, carecían de generalidad; cada cálculo requería una construcción diferente que servía solo para ese caso y para ningún otro. La deducción de Eudoxo del área del círculo, por ejemplo, no era apli-

Con el fin de completar su formación, en 1850 se incorporó a la Universidad de Gotinga para obtener el doctorado en matemáticas, que logró dos años más tarde gracias a un trabajo de investigación supervisado nada menos que por Carl Friedrich Gauss, uno de los matemáticos más brillantes de todos los tiempos.

Digno sucesor

Gauss falleció en 1855 y, por ofrecimiento de la universidad, Dedekind se hizo cargo de la cátedra que había quedado vacante en Gotinga. A partir de ese año, además, comenzó a trabajar en estrecha colaboración con Bernhard Riemann, quien también había sido discípulo de Gauss. Pocos años después, Dedekind decidió volver a Braunschweig y en 1862 comenzó a trabajar como profesor de Matemáticas en su conocido Collegium Carolinum, puesto en el que permaneció hasta su jubilación en 1894. Sin embargo, nunca abandonó la investigación matemática, a la que hizo aportes decisivos, especialmente en cálculo y álgebra. Dedekind jamás se casó y desde su regreso a Braunschweig vivió siempre con una de sus hermanas, también soltera. Richard Dedekind falleció en Braunschweig el 12 de febrero de 1916.

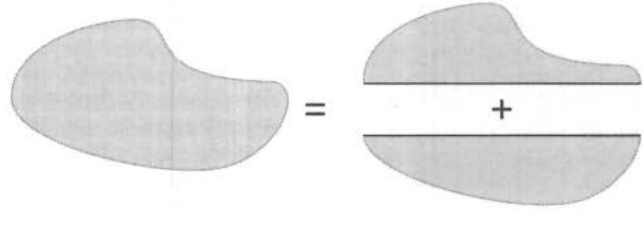
cable a una elipse; su razonamiento se ajustaba específicamente a un círculo, y no a otras figuras.

A partir del siglo XVI, diferentes matemáticos europeos emprendieron la búsqueda de un método general para resolver, entre otros problemas, la cuestión de calcular el área de figuras limitadas por curvas. Cuatro de los matemáticos más destacados en esta tarea fueron Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). Finalmente, a finales del siglo XVII, apoyados en los esfuerzos de sus predecesores, Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), independientemente uno del otro, hallaron el método general para calcular el área de figuras planas cualesquiera. Este método, una de las herramientas fundamentales del cálculo, se llama *integral* y es muy relevante para nosotros explicar brevemente la idea en la que está basado.

Comencemos por decir que cualquier figura, aunque esté totalmente limitada por curvas, puede dividirse en dos o más fragmentos (siempre una cantidad finita), no necesariamente iguales entre sí, de modo que cada una de ellas tenga un segmento como parte de su frontera (figura 9).

El problema de calcular el área total de la figura se reduce entonces al de calcular el área de cada uno de esos fragmentos. Tomemos uno de ellos. Podemos pensar que el segmento que es parte de su frontera, y al que por comodidad llamaremos *base*, es la parte de la recta numérica que está comprendida entre ciertos números a y b. Imaginemos también que conocemos la fórmula matemática que, dado cualquier número x de la base, nos

FIG. 9



Podemos calcular el área de cada una de las dos figuras de la derecha, que tienen un segmento como parte de su frontera.

permite calcular la longitud del segmento que une, de modo perpendicular a la base, al punto x con la curva; llamaremos y a esa longitud (figura 10).

FIG. 10

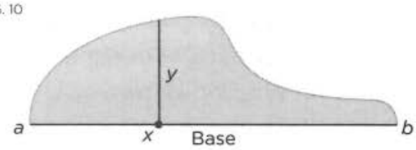
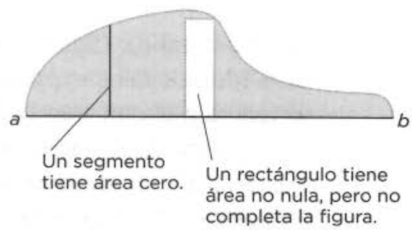


FIG. 11



En principio, el método consiste en pensar en la figura como formada por los infinitos segmentos perpendiculares a la base y que unen a esta con la curva (habría un segmento por cada número x). El área total de la figura se obtendría entonces como la suma de las áreas de esos segmentos. Sin embargo, este pensamiento nos lleva a una paradoja, esencialmente la misma que discutimos en el primer capítulo al hablar del pensamiento de Aristóteles.

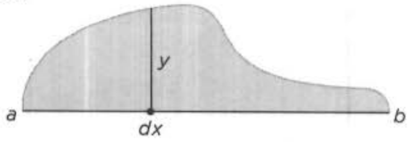
En efecto, así como, según dijimos en aquella oportunidad, un punto matemático tiene longitud exactamente igual a cero, de la misma forma un segmento matemático (que tiene longitud, pero no anchura ni profundidad) tiene un área que es también exactamente igual a cero; por lo que el área de la figura, si la pensamos como la suma de segmentos, sería igual a $0 + 0 + 0 + \dots = 0$.

Sin embargo, tampoco podríamos reemplazar a los segmentos por rectángulos (que sí tienen área mayor que cero), porque en ese caso volveríamos a una situación similar a nuestro primer intento por completar el círculo con rectángulos, siempre nos quedaría una parte sin cubrir (figura 11).

Para salvar esta situación, Newton y Leibniz introdujeron la idea de infinitésimo, un concepto que se volvió esencial para el cálculo hasta mediados del siglo XIX. Ahora bien, el quid de todo este relato es que el concepto de infinitésimo es totalmente ambiguo y muy difícil, o quizá imposible, de aprehender.

¿Qué es un infinitésimo? Un infinitésimo sería un segmento «infinitamente pequeño», un objeto matemático a medio camino entre un punto de longitud cero y un segmento pequeñísimo. En

FIG. 12



otras palabras, sería una línea más pequeña que cualquier otra línea concebible, pero que, no obstante, no se reduce a ser un punto.

Pensemos entonces en cada segmento perpendicular a la base, no como un segmento matemático, sino como un rectángulo de base infinitesimal dx (figura 12); dx es la escritura que usaba Leibniz para los infinitésimos y que hoy en día, como veremos enseguida, se usa todavía en algunas nomenclaturas del cálculo.

La figura no es pensada entonces como una suma de segmentos, sino como la suma de rectángulos de base infinitesimal. El reemplazo de segmentos por rectángulos de base infinitesimal tiene una doble ventaja; por un lado, como la base de cada rectángulo es una línea infinitesimal (y no es un punto), entonces el rectángulo no tiene área igual a cero, por lo que evitamos la paradoja anterior. Por otra parte, como la base de cada rectángulo es infinitamente pequeña, se logra llenar todos los intersticios de la figura sin dejar nada descubierto.

La base de cada rectángulo es entonces dx y su altura es y. Por lo tanto, el área de cada rectángulo de base infinitesimal es $y \cdot dx$, que también se puede escribir, omitiendo el punto de multiplicación, como $y\,dx$. Para calcular el área de la figura, en teoría tendríamos que sumar todos los $y\,dx$ para x entre a y b; Leibniz escribía esta idea de la siguiente forma:

$$\int_a^b y\,dx.$$

La línea curvada que aparece a la izquierda del símbolo es una letra S deformada (por la inicial de *summa*, que es *suma* en latín). El símbolo completo se llama *integral* y es usado todavía hoy para representar el área de la figura limitada por una curva y un segmento (además de tener muchísimas otras aplicaciones en el cálculo). Y así como el método de Eudoxo le permitió deducir la fórmula para calcular el área de un círculo, de la misma forma,

el pensar en las figuras como formadas por rectángulos de base infinitesimal permite, mediante razonamientos adecuados, hallar, por ejemplo, la fórmula para calcular el área encerrada por una elipse, así como por cualquier otra curva.

LA FUNDAMENTACIÓN LÓGICA

Pero todo el desarrollo anterior se basa en un concepto bastante dudoso porque, ¿qué significa que un segmento sea más pequeño que cualquier otro segmento concebible? Esto querría decir obviamente que no hay ningún segmento más pequeño que él, pero, si lo partimos en dos, ¿no obtenemos de ese modo un segmento menor?

El concepto de infinitésimo parece autocontradictorio y hay que decir que tanto Newton como Leibniz eran perfectamente conscientes de ello. Por ejemplo, en su primera exposición del cálculo, en 1680, en un artículo de seis páginas titulado «Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas», Leibniz expone las fórmulas que se deducen de los razonamientos basados en infinitésimos, pero omite hacer cualquier referencia a los infinitésimos en sí. Los hermanos Jean y Jacques Bernoulli, grandes matemáticos suizos de aquella época, comentaron que el trabajo de Leibniz era «más un enigma que una explicación». Por su parte, Newton decidió más adelante abandonar directamente la idea de infinitésimo y reemplazarla por el concepto, no menos oscuro en realidad, de «fluxiones» y «fluyentes», una idea que no es necesario explicar aquí.

Ahora bien, ¿por qué se aceptó el cálculo, si su base lógica era tan endeble? La respuesta es que si se suspendía la incredulidad y se aceptaba la existencia de los infinitésimos, así como la validez de los razonamientos basados en ellos, las fórmulas que se obtenían a partir de esos razonamientos eran totalmente correctas. Las integrales permitían —y permiten hoy en día— la obtención

de áreas y volúmenes que estaban totalmente fuera del alcance de los métodos de la geometría griega (como el área de superficies con forma de silla de montar o el volumen de cuerpos aovados). A lo largo del siglo XVIII, de la mano, entre otros, de los hermanos Bernoulli y de Leonhard Euler, el cálculo diversificó sus métodos y sus aplicaciones, y se volvió, entre otras cosas, indispensable para la física matemática, que no podría haber existido sin él.

Pero precisamente a causa de esa indispensabilidad del cálculo, con el correr de las décadas se volvió cada vez más imperiosa la necesidad de darle una fundamentación lógica precisa, la necesidad de basar sus razonamientos en conceptos claros e indubitables. Esta tarea de fundamentar lógicamente el cálculo fue emprendida por muchos matemáticos a lo largo del siglo XIX, entre ellos Karl Weierstrass, Richard Dedekind y Georg Cantor.

LOS NÚMEROS REALES REVISITADOS

El aporte más importante de Weierstrass en cuanto a la fundamentación del cálculo fue la introducción del concepto de límite, que eliminó definitivamente a los infinitésimos (a pesar de eso, como dijimos antes, la escritura dx sobrevive todavía en algunas nomenclaturas). Sin entrar en detalles técnicos, podemos decir que el límite básicamente sustituye la idea de un segmento infinitamente pequeño por la idea de un segmento que es *solo en potencia* infinitamente pequeño. Es decir, en lugar de pensar en rectángulos de base infinitesimal, pensamos en rectángulos normales que se van afinando cada vez más hasta hacerse tan estrechos como se desee. Razonando en base a esta idea dinámica de magnitudes que se van haciendo cada vez más pequeñas (infinitamente pequeñas, pero solo en potencia) es posible llegar a las mismas fórmulas que se obtenían en base a los infinitésimos, pero ahora sobre una base lógica más segura.

Sin embargo, Weierstrass no hablaba de segmentos ni de rectángulos, sino que expresaba todas sus ideas numéricamente, en base a fórmulas. Dijimos antes que un segmento podía pen-

sarse como la parte de la recta numérica comprendida entre dos números *a* y *b*. Para Weierstrass, en cambio, un segmento *era* directamente la colección (infinita en potencia) de los números reales entre *a* y *b*; el concepto geométrico de segmento ni siquiera aparecía en sus razonamientos. La noción de límite, por ejemplo, aunque nosotros la hemos asociado a segmentos y rectángulos, Weierstrass la expresaba completamente en términos de operaciones numéricas.

Esto se debe a que a lo largo del siglo XIX el cálculo se fue alejando cada vez más de su base geométrica hasta descartarla completamente; un proceso largo y difícil, considerando que hasta ese momento la geometría clásica griega había sido la base indiscutible de todo razonamiento matemático. En la historia de las matemáticas, este proceso se conoce como la «aritmetización del cálculo» y consiste, entonces, en el reemplazo de los razonamientos de tipo geométrico (que trataban con objetos esencialmente estáticos) por razonamientos basados exclusivamente en fórmulas y en números, particularmente en los números reales (que permitían razonamientos «dinámicos», como exigía, por ejemplo, la idea de límite). Por lo tanto, para que el cálculo tuviera una base lógica sólida a toda prueba se necesitaba ante todo una definición lógicamente rigurosa de los números reales, una definición que a su vez careciera de todo concepto geométrico.

¿Qué son los números reales? Decíamos en el capítulo anterior que la propiedad esencial de los números reales, la propiedad que los define y caracteriza, es el hecho de que completan toda la recta numérica, es decir, el hecho de que a cada punto de la recta le corresponde un número real, así como a cada número real le corresponde un punto de la recta. Pero, a finales del siglo XIX, esta definición no era satisfactoria porque, como ya hemos comentado, se buscaba una definición de los números reales que no apelara a conceptos geométricos. Pero, ¿cómo se puede expresar el hecho de que completan toda la recta sin hablar de «recta» ni de «punto»? Esta pregunta constituye el llamado «problema del continuo» («continuo» era el término que se usaba en aquella época para referirse a la recta numérica), y en la segunda mitad del siglo XIX llegó a ser una cuestión central del cálculo.

En Halle, a principios de la década de 1870, Cantor, que había sido alumno de Weierstrass en Berlín y estaba, por lo tanto, muy compenetrado con el problema de la fundamentación del cálculo, comenzó a trabajar en la búsqueda de una definición rigurosa de los números reales. Finalmente, expuso sus conclusiones en un artículo que tituló «Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen» [Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas], publicado en 1872 en *Mathematische Annalen*. Antes, Dedekind había trabajado también en el mismo problema, lo que provocó entre ambos algunas fricciones por cuestiones de prioridad.

La definición que encontró Cantor se basa en el concepto de sucesión fundamental. Dijimos en el capítulo anterior que una sucesión está formada por un primer número, luego otro, luego otro, y así siguiendo. Una sucesión fundamental, según Cantor, es una sucesión formada por números racionales en la cual, a medida que se avanza por ella, la diferencia entre dos términos cualesquiera, sean o no consecutivos, se hace tan pequeña como se desee.

Tomemos, por ejemplo, la sucesión formada por los números 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; 3,141592; 3,1415926; 3,14159265; 3,141592653; 3,1415926535;... (en cada paso, estamos agregando un dígito de la expresión decimal de π). Observemos que, por ejemplo, del quinto término en adelante, todos los números de la sucesión comienzan con 3,14159... Esto quiere decir que a partir del quinto número la diferencia entre dos términos de la sucesión, sean o no consecutivos en ella, comienza con cinco ceros inmediatamente detrás de la coma decimal y es, por lo tanto, menor que 0,00001 (que tiene solo cuatro ceros detrás de la coma decimal). De manera similar, a partir del sexto número la diferencia entre dos términos de la sucesión, consecutivos o no, es menor que 0,000001; a partir del séptimo, la diferencia entre dos términos de la sucesión, consecutivos o no, es menor que 0,0000001; y así sucesivamente.

Concluimos entonces que 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; 3,141592; 3,1415926; 3,14159265; 3,141592653; 3,1415926535;... es una sucesión fundamental.

Para Cantor, la propiedad que define a los números reales está dada por el hecho de que a cada sucesión fundamental le

corresponde un número real y, recíprocamente, a cada número real le corresponde una sucesión fundamental. Todo número real está definido por una sucesión fundamental; la sucesión del ejemplo anterior define, obviamente, el número π.

Una aclaración importante es que no debe confundirse lo que hemos dicho más arriba con la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre sucesiones fundamentales y números reales; porque, aunque a cada sucesión le corresponde un solo número real, en realidad diferentes sucesiones pueden corresponderse con el mismo número. Por ejemplo, la sucesión 3,1; 3,141; 3,14159; 3,1415926; 3,141592653;..., que se obtiene agregando cada vez dos dígitos de π, es una sucesión fundamental diferente a la anterior que también se corresponde con el número π.

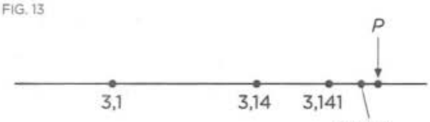
¿Cómo sabemos que 0,110001000000000000000001000..., es decir, el número de Liouville existe? ¿Cómo podemos asegurar que esa expresión representa en verdad un número real? (Recuérdese que Kronecker rechazaba esa afirmación.) Para Cantor, basta con mostrar una sucesión fundamental asociada a ese número, que en este caso es 0,1; 0,11; 0,110001;... La existencia de esa sucesión fundamental, según Cantor, garantiza la existencia del número.

Veamos cómo la definición de Cantor expresa, tal como debe ser, el hecho de que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Recordemos que a los números 0 y 1 se les asignan puntos arbitrarios de la recta y que, una vez que estos han sido elegidos, quedan totalmente determinadas las posiciones que corresponden a todos los números racionales. Supongamos ahora que tenemos un punto P al que no le ha correspondido ningún número racional (figura 13). ¿Cómo podemos asegurar que a ese punto P le corresponde un número (obviamente irracional)?

Para asegurarlo, tomamos una sucesión de puntos que correspondan a números racionales y que estén cada vez más cerca del punto P. Los números racionales en cuestión formarán una sucesión fundamental, a esa sucesión fundamental

FIG. 13



le corresponderá un número real, y ese número real será el que le corresponda al punto *P*. En el ejemplo de la figura 13, al punto *P* le corresponde el número π.

Pero, para Cantor, además, y ahí es donde llegamos al infinito, otra propiedad fundamental del continuo es el hecho de que no es numerable (cabe recordar que una colección es numerable si es coordinable con los números naturales), y en una serie de seis artículos publicados entre 1879 y 1882 en los *Mathematische Annalen* propuso, entre otras cuestiones relacionadas con los cardinales infinitos, definiciones alternativas del continuo en las que se incluía a la no numerabilidad como una de sus características esenciales.

Observemos, por cierto, que el hecho de que los puntos de un segmento formen una colección no numerable permite resolver la paradoja de Aristóteles. Recordemos que esta paradoja dice que si un segmento estuviera formado por puntos, entonces, como cada punto tiene longitud cero, la longitud total del segmento sería $0+0+0+0+\ldots=0$. Ahora bien, ¿cuántos ceros estamos sumando? La respuesta es que estamos sumando infinitos ceros, pero, ¿infinito de qué cardinal?

Cuando escribimos $0+0+0+0+\ldots$, el cardinal de los ceros que estamos sumando es ********..., que es el de los naturales. ¡Estamos sumando solamente una cantidad numerable de ceros! La suma de una cantidad numerable de ceros es, en efecto, cero, y es por eso que el continuo no puede ser numerable. Pero las sumas no numerables tienen reglas propias que son diferentes a las de las sumas numerables y, curiosamente, una suma de una cantidad no numerable de ceros puede dar como resultado un número mayor que cero. De este modo, tal como decía Cantor, vemos que la distinción entre lo numerable y lo no numerable tiene un papel fundamental en la definición de los números reales y, por lo tanto, en el cálculo.

Pero el cuadro todavía no está completo. ¿Por qué el artículo en el que Cantor define los números reales incluye en su título la expresión «series trigonométricas»? ¿Qué son las series trigonométricas y qué papel tuvieron en el pensamiento de Cantor? Hablaremos de ello en el próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

Los ordinales infinitos

En 1883 Georg Cantor publicó un artículo titulado «Fundamentos para una teoría general de variedades», trabajo que marcó el punto culminante de su creatividad matemática. En ese artículo define por primera vez toda una colección de números infinitos, a los que llamó ordinales. El germen de las ideas que Cantor expuso en ese trabajo histórico ya estaba presente en un artículo que había escrito más de diez años antes, pero para poder desarrollarlas plenamente tuvo que vencer los condicionamientos psicológicos que la época le imponía.

Decíamos en el capítulo anterior que Georg Cantor y Richard Dedekind tenían muchos puntos en común en su modo de pensar las matemáticas, y una de las cuestiones en las que coincidían especialmente era en la necesidad de introducir nociones conjuntistas en los razonamientos matemáticos. Pero, ¿qué son «conceptos conjuntistas»? Para entenderlo, debemos preguntarnos ante todo qué es un conjunto.

En su artículo de 1883, titulado «Fundamentos para una teoría general de variedades», con el subtítulo «Una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito», publicado privadamente por Cantor como una monografía separada —el mismo artículo de las «notables aclaraciones» que mencionamos en el primer capítulo, y del que hablaremos en detalle en este—, Cantor decía:

> *Mannigfaltigkeitslehre* [teoría de variedades]. Con esta palabra designo el concepto de una doctrina muy amplia, que hasta ahora solo he tratado de elaborar bajo la forma especial de una teoría de conjuntos aritméticos o geométricos. A saber, entiendo en general por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley.

En un artículo de 1895, al que volveremos en el capítulo siguiente, Cantor exponía, más brevemente:

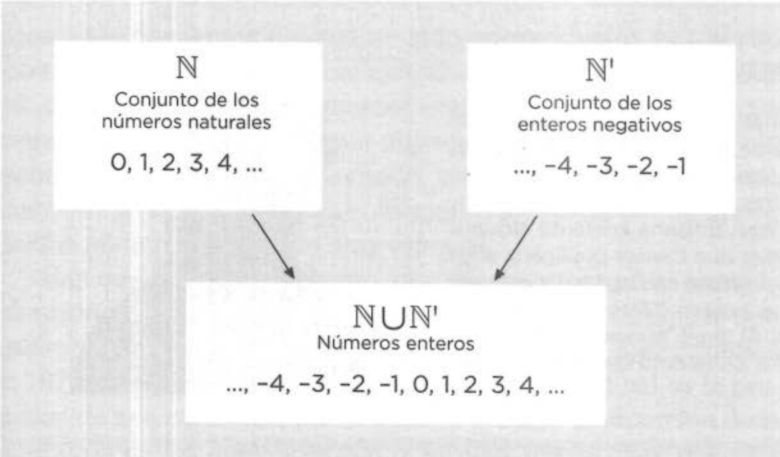
> Por un conjunto [*Menge*, en alemán] entenderemos la reunión en un todo de objetos definidos y separados de nuestra intuición o nuestro pensamiento.

Es decir, «conjunto» es sinónimo de «colección», tal como hemos venido usando esta palabra hasta ahora. La importancia crucial que tuvieron estas definiciones en el desarrollo del pensamiento matemático es que establecen que un conjunto es un objeto en sí mismo diferente en su esencia de los entes que lo forman. Algunos años más tarde, el lógico británico Bertrand Russell (1872-1970) ilustraría esta diferencia al decir que «una colección de caballos no es un caballo».

> «Un conjunto es como un saco cerrado, que contiene cosas completamente determinadas, pero de modo que uno no las ve, y no sabe nada de ellas salvo que existen y están bien determinadas.»
>
> — **Richard Dedekind al matemático alemán Felix Bernstein en 1899.**

Por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales, que suele indicarse con la letra $\mathbb{Q}$, tiene propiedades específicas solamente atribuibles a $\mathbb{Q}$ como un todo y no a los números racionales individualmente, como la propiedad de ser numerable. En este caso, además, en el que hablamos de $\mathbb{Q}$ como un todo existente en acto, se muestra que la definición de conjunto implica inmediatamente la aceptación del infinito actual.

Ahora bien, así como podemos efectuar operaciones entre números, tales como la suma o la multiplicación, de la misma manera podemos efectuar operaciones entre conjuntos, como por ejemplo la *unión*. Si tenemos dos colecciones, su unión se define como el conjunto que se obtiene al reunir en un todo a los objetos que forman cada una de esas dos colecciones. Por ejemplo, si llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, cuyos miembros son los números 0, 1, 2, 3,..., y $\mathbb{N}'$ al conjunto formado por los números –1, –2, –3,..., entonces la unión de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}'$ es el conjunto de los números enteros, que suele indicarse con la letra $\mathbb{Z}$ (por la



La unión de dos conjuntos contiene a la vez a los elementos de uno y otro conjuntos.

inicial de la palabra *Zahl*, que en alemán significa *número*) y que contiene simultáneamente a los miembros de $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{N}'$. En símbolos matemáticos se escribiría $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \mathbb{Z}$ (véase la figura).

Una propiedad que Cantor enuncia en su artículo de 1895, y que está ilustrada en la figura, es que la unión de dos conjuntos numerables da siempre como resultado un conjunto numerable. El estudio de las propiedades, que, como esta que acabamos de enunciar, se refieren a las colecciones en tanto que objetos en sí mismos, constituye la llamada *teoría de conjuntos*, y Cantor es considerado su creador por haber sido el primero en concebir la idea de estudiar esta clase de propiedades. Al mismo tiempo, uno de los aspectos más importantes de la teoría de conjuntos es el estudio de los cardinales de las colecciones infinitas, y es por ese motivo que en el primer capítulo dijimos que la teoría de conjuntos y la teoría del infinito matemático son esencialmente la misma teoría.

PUNTOS EN COMÚN

¿Estamos diciendo que la teoría de conjuntos nació en 1883? ¿Cómo es posible entonces que en fecha tan temprana como 1872,

EL INFINITO DE BOLZANO

El matemático Bernard Bolzano, nacido en Praga en 1871, escribió *Paradojas del infinito*, libro publicado póstumamente en 1851, tres años después de su muerte. En esa obra, Bolzano adelantó algunas de las ideas que Cantor publicaría años después, aunque no llegó a darse cuenta de que existen diferentes niveles de infinitud, ni logró tampoco desarrollar una teoría coherente del infinito matemático.



Cantor y Dedekind estuvieran ya de acuerdo en introducir en las matemáticas conceptos conjuntistas? Desarrollemos con cuidado las respuestas a estas dos preguntas.

Como relatamos en el capítulo anterior, en 1872 Cantor publicó un artículo en el que proponía una solución para el problema del continuo; problema que, recordemos, pedía hallar una definición de los números reales que no apelara a conceptos geométricos. Es importante mencionar que ya por entonces Cantor era consciente de que ese problema lo llevaría a considerar colecciones infinitas en acto.

En el mismo año, Dedekind publicó una solución para el problema del continuo similar a la de Cantor, basada en un concepto hoy conocido como «cortaduras de Dedekind». Se entiende entonces por qué en 1872 Cantor y Dedekind encontraron que tenían mucho en común en cuanto a su modo de pensar las matemáticas.

Pero, como decía Cantor en la cita de 1883 que mostramos al comienzo de este capítulo, hasta mediados de la década de 1880 tanto él como Dedekind admitían solamente colecciones formadas por números o por puntos geométricos, no por objetos cualesquiera. Las respuestas a las preguntas del inicio de este apartado son, entonces, que aunque en la década de 1870 tanto Cantor como Dedekind empleaban ya conceptos conjuntistas en sus tra-

bajos, esos conceptos todavía no eran aprovechados en toda su potencia, porque solamente se aplicaban a colecciones formadas por números o por puntos geométricos. La posibilidad de que un conjunto estuviera formado por objetos cualesquiera no apareció hasta 1883 en el trabajo antes citado, aunque en él, como veremos, Cantor todavía se restringía a colecciones formadas por números, aunque números de un tipo muy especial.

Hay que decir, sin embargo, que el salto conceptual hacia la admisión de colecciones formadas por objetos de cualquier tipo estaba ya latente en la definición de cardinal, que Cantor publicó en 1877. En efecto, cuando Cantor dice que el cardinal es la propiedad de una colección que se obtiene al hacer abstracción de la naturaleza de los miembros que la forman, queda claro que está diciendo que no importa qué objetos formen la colección. Si en una colección cualquiera reemplazamos, por ejemplo, a los números o a los puntos por letras, por ideas o por cualquier otro objeto, el cardinal será exactamente el mismo, ya que la idea de cardinal, precisamente, no toma en cuenta cuál es la naturaleza de los miembros de la colección.

CONFLICTOS PERSONALES

El artículo de 1883, titulado «Fundamentos para una teoría general de variedades», que estudiaremos más adelante, marcó el punto culminante de la carrera científica de Cantor; sin embargo, ese período de su vida estuvo marcado al mismo tiempo por serios problemas personales.

El 21 de octubre de 1881 falleció Eduard Heine, quien había dirigido las primeras investigaciones de Cantor en Halle. Cantor concibió entonces un proyecto ambicioso; dado que se le impedía acceder a universidades de renombre como las de Berlín o Gotinga, decidió llevar a Halle a investigadores de prestigio que fueran afines al estudio del infinito con el objetivo de crear allí un polo de poder. Como primer paso en esa dirección, logró persuadir a las autoridades de la universidad de que le ofrecieran a

Dedekind el puesto que había quedado vacante. Sin embargo, para sorpresa y decepción de Cantor, Dedekind declinó el ofrecimiento y el puesto fue ocupado finalmente por Albert Wangerin, un geómetra de segundo orden totalmente ajeno a las ideas de Cantor.

No se conocen los motivos exactos por los que Dedekind rechazó la oferta de la Universidad de Halle, pero la verdad es que desde hacía casi veinte años vivía en su ciudad natal de Braunschweig, donde era director del colegio en el que él mismo había estudiado y donde realizaba sus investigaciones matemáticas a su propio ritmo, sin presiones, por lo que quizá el motivo fuera simplemente que no quería cambiar ese estilo de vida.

«Me imagino un conjunto como un abismo.»

— Georg Cantor al matemático alemán Felix Bernstein en 1899.

Sin embargo, Cantor se resintió mucho por el rechazo y las relaciones entre ambos se enfriaron rápidamente, hasta que a finales de 1882 la correspondencia que habían mantenido desde hacía diez años, así como cualquier otro contacto entre ellos, se interrumpió por completo.

Casi al mismo tiempo en que daba por terminada su correspondencia con Dedekind, Cantor comenzó a escribirse con el sueco Gösta Mittag-Leffler, un matemático de primer nivel que, como Dedekind, apoyaba también las investigaciones acerca del infinito. En ese mismo año de 1882, Mittag-Leffler había fundado la revista *Acta Mathematica*, en la que Cantor encontró un espacio favorable para publicar sus trabajos, un espacio que estaba fuera de la esfera de influencia de Kronecker. Entre 1883 y 1885 se publicaron en *Acta Mathematica* tres artículos en los que Cantor estudiaba cuestiones vinculadas con su resolución del problema del continuo.

Pero la relación con Mittag-Leffler no duró mucho. En 1884, el matemático sueco convenció a Cantor de que retirara un artículo que había enviado para su publicación; la intención de Mittag-Leffler era completamente favorable a Cantor, ya que entendía que el trabajo, titulado «Principios de una teoría de los tipos de orden», era demasiado especulativo y carecía de resultados claros

y concisos, por lo que podía resultar negativo para la imagen de la teoría de conjuntos. Mittag-Leffler le escribió a Cantor que publicar demasiado sin presentar resultados tangibles podía llevar a su teoría al descrédito, y que en ese caso quizá tendrían que pasar más de cien años hasta que sus ideas fueran redescubiertas. Pero Cantor tomó a mal la recomendación de Mittag-Leffler, pues la interpretó en el sentido de que tenía que esperar cien años para publicar sus ideas:

> ¡De haberle hecho caso a Mittag-Leffler, debería haber esperado hasta el año 1984, lo que me pareció una demanda excesiva! [...] Pero, por supuesto, no quiero volver a saber nada de *Acta Mathematica*.

Cantor escribió estas palabras en 1885 y a partir de ese momento interrumpió toda relación con Mittag-Leffler; además, fiel a lo que había escrito, nunca volvió a enviar un trabajo a *Acta Mathematica*. El artículo «Principios de una teoría de los tipos de orden» jamás fue publicado.

En esa época, Cantor estaba pasando por uno de los períodos más oscuros de su vida. Abandonado, según él lo entendía, por Dedekind, acosado por sus detractores, cerrado su acceso largamente deseado a Berlín o a Gotinga, e imposibilitado de crear un polo de poder en Halle, en mayo de 1884 cayó en una profunda depresión de la que tardaría mucho tiempo en recuperarse. La verdad es que la creatividad matemática que había brillado en 1883 en los «Fundamentos para una teoría general de variedades» se había apagado y no renacería hasta la década de 1890.

En esos años intermedios, Cantor publicó algunos artículos en los que exploraba, con escaso éxito, consecuencias filosóficas, así como posibles aplicaciones a la física de su teoría del infinito. También se obsesionó con la idea de que las obras de William Shakespeare habían sido escritas en realidad por Francis Bacon, una teoría que surgió a mediados del siglo XVIII y que es considerada absurda por muchos estudiosos, aunque en la actualidad tiene todavía algunos seguidores. Cantor gastó una considerable cantidad de dinero en la adquisición de ediciones antiguas de las obras de Shakespeare y finalmente publicó tres monografías al respecto.

GÖSTA MITTAG-LEFFLER



Magnus Gösta Mittag-Leffler nació en Estocolmo, Suecia, el 16 de marzo de 1846; fue un joven muy talentoso, con diversos intereses que incluían la ciencia y la literatura. En 1865 ingresó en la Universidad de Upsala, también en Suecia, para estudiar la carrera de actuario, pero al poco tiempo se inclinó por las matemáticas y en 1872 obtuvo su doctorado. Mittag-Leffler hizo importantes contribuciones al cálculo, la geometría analítica, la teoría de probabilidades y la teoría de funciones; fue miembro de casi todas las sociedades matemáticas europeas y recibió doctorados honorarios de las universidades de Oxford, Cambridge, Bolonia y Oslo, entre otras. En 1882 fundó la revista *Acta Mathematica*, que hoy en día todavía se publica, y de la que fue su editor hasta que falleció, el 7 de julio de 1927.

SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Pero volvamos al año 1883 y a los «Fundamentos para una teoría general de variedades», el momento más brillante de la carrera de Cantor. En realidad, el relato de la redacción de ese artículo histórico nos lleva a 1869, año de la llegada de Georg Cantor a Halle y al problema que Eduard Heine le propuso como tema de investigación, un problema relacionado con las series trigonométricas o series de Fourier.

¿Qué es una serie trigonométrica? Imaginemos que tenemos un resorte que cuelga verticalmente de su extremo superior y que sostiene en su extremo inferior libre un cierto peso. Esta situación se representa en la posición A de la figura 1, en la que no se muestran muchos objetos, sino las diferentes posiciones que ocupará el mismo resorte.

Ahora tiramos del peso hacia abajo hasta que llega a la posición B y luego lo soltamos. El resorte comenzará a dilatarse y a contraerse, pasando sucesivamente por las posiciones C, D, E y F, además de todas las intermedias. Imaginemos también que estamos en una situación ideal en la que el resorte nunca deja de moverse y vuelve siempre perfectamente a sus posiciones de máxima contracción (D en la figura 1) y de máximo estiramiento (B y F, en la figura 1). Si conectamos las sucesivas posiciones del peso inferior con una curva, esta nos dará una descripción matemática del movimiento del resorte (figura 2).

FIG. 1

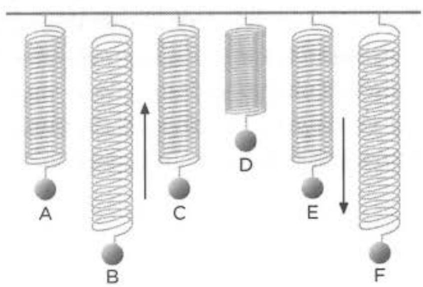


FIG. 2

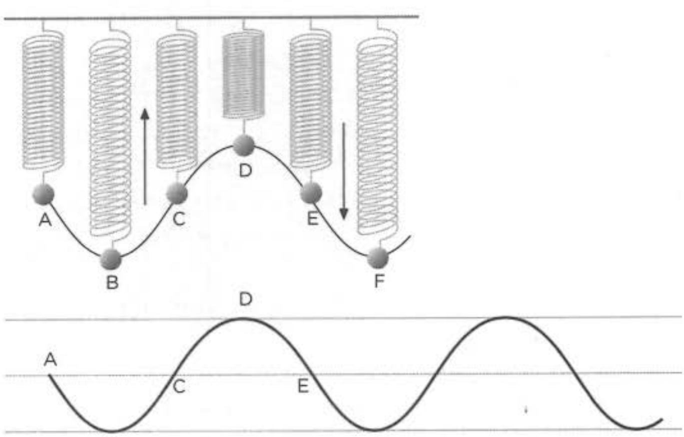
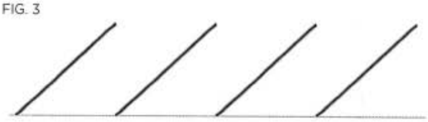


FIG. 3



Observemos que, debido a que el peso pasa una y otra vez por las mismas posiciones, entonces el gráfico repite una y otra vez el mismo dibujo, esta característica se expresa diciendo que el gráfico es *periódico*. Ahora bien, los matemáticos del siglo XVIII se dieron cuenta de que eran muchos los fenómenos físicos —tales como los relacionados con la propagación de un sonido o la propagación del calor— que podían describirse mediante gráficos periódicos. Además, observaron que a veces esos gráficos tenían *discontinuidades*, es decir, saltos abruptos; observemos, por ejemplo, la figura 3.

El gráfico en sí está formado por las sucesivas líneas oblicuas, y como vemos, al dibujarlo, tenemos que «saltar» del extremo superior de cada línea al extremo inferior de la siguiente.

En la figura 3 ya no se describe un movimiento físico, sino la intensidad de una señal sonora; la línea horizontal representa

UNA PARADOJA

¿Cuál es el resultado de 1-1+1-1+1-..., donde las operaciones continúan infinitamente? El matemático alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) aseguraba que el resultado de ese «cálculo infinito» es 1/2. Veamos cuál era su razonamiento. Llamemos *S* al resultado del cálculo, entonces:

$$1-1+1-1+1-\ldots=S$$
$$1-(1-1+1-1-\ldots)=S.$$

En el paréntesis hay un 1 menos que en el cálculo original, pero como la cantidad de números 1 es infinita, al quitar uno de ellos no estamos cambiando nada; es



Retrato de Gottfried Wilhelm von Leibniz de hacia 1700, conservado en el Herzog Anton Ulrich Museum, Braunschweig, Alemania.

la intensidad nula, o el silencio. Veamos cómo se interpreta el gráfico bajo estas condiciones. Al principio estamos en silencio y enseguida una señal sonora comienza a aumentar gradualmente de intensidad (esto se ve en que la primera línea oblicua sube); el sonido llega a su intensidad máxima y cae el silencio, pero inmediatamente el sonido comienza a subir de intensidad exactamente igual que antes, hasta llegar una vez más al mismo nivel máximo de intensidad (esto se ve en que la segunda línea oblicua sube igual que la primera); cae otra vez el silencio, y el mismo esquema vuelve a repetirse una y otra vez.

A principios del siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) desarrolló un método que le permitía escribir cualquier gráfico periódico como la suma de ciertas curvas específicas muy sencillas, curvas que se describen matemáticamente mediante fórmulas llamadas *funciones trigonométricas*. Estas sumas, a su vez, acostumbran a involucrar una cantidad infinita (en potencia) de curvas, y como en matemáticas a las sumas infinitas se las suele llamar *series*, el método recibe

decir, el resultado del paréntesis sigue siendo S. Tenemos así que $1-S=S$, de donde deducimos que S vale 1/2. Pero también podemos agrupar de la siguiente manera:

$$1-1+1-1+1-\ldots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0.$$

El cálculo entonces daría cero como resultado. O también podemos agrupar así:

$$1-1+1-1+1-\ldots=1-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-\ldots=1,$$

por lo que el resultado sería 1. ¿Cuál es entonces el resultado correcto, 1/2, 0 o 1? Paradojas como esta preocuparon durante décadas a los matemáticos, hasta que, finalmente, en el siglo XIX se descubrieron las reglas correctas para operar con sumas o restas infinitas. La respuesta al dilema es que el cálculo $1-1+1-1+1-\ldots$ no da ningún resultado. En otras palabras, su supuesto resultado en realidad no existe. El razonamiento de Leibniz falla, precisamente, porque S no es una cantidad existente.

actualmente el nombre de *descomposición en series trigonométricas* o, también, en *series de Fourier*. Gracias a la descomposición en series trigonométricas, Fourier pudo estudiar con gran éxito un muy importante número de fenómenos físicos; y hoy en día este método sigue siendo una herramienta fundamental en muchas ramas de las matemáticas, así como de la física y de la ingeniería.

DESCOMPOSICIÓN ÚNICA

En la década de 1860, en Halle, Eduard Heine trabajaba en el problema de determinar si la descomposición de un gráfico periódico como serie de Fourier siempre es única. Dicho de otra manera, la cuestión que se planteaba Heine es si podría llegar a suceder que un gráfico periódico tuviera dos escrituras diferentes como serie trigonométrica.

Heine logró demostrar que si el gráfico no tiene «saltos» o discontinuidades, entonces la descomposición es, en efecto, única. Sin embargo, no había encontrado una demostración general que abarcara todas las situaciones posibles. Por ejemplo, no había podido demostrar la unicidad en el caso de que en cada período —que es como se llama al dibujo básico que se repite una y otra vez— hubiera una cantidad infinita (en potencia) de saltos. De modo que, cuando Cantor llegó a Halle en 1869, Heine le propuso que trabajara en la cuestión de si es siempre única la descomposición de un gráfico periódico, aun cuando la cantidad de saltos en cada período pudiera crecer indefinidamente.

Cantor estudió el problema y en 1870 obtuvo una primera respuesta; la descomposición es única siempre y cuando los saltos estén distribuidos de una determinada manera. Es decir, para que se pueda garantizar la unicidad de la descomposición, la manera en que los saltos van apareciendo debe cumplir ciertas condiciones específicas. En realidad, tal como vimos en el capítulo anterior, los puntos de un gráfico tienen dos coordenadas, una abscisa y una ordenada, y eran las abscisas de los saltos las que debían

SUMAS INFINITAS

Los matemáticos que trabajaron a lo largo del siglo XIX en el problema de la fundamentación del cálculo descubrieron que las series, es decir, las sumas infinitas, tienen reglas propias que pueden ser muy diferentes de las reglas conocidas para las sumas finitas habituales. Por ejemplo, en 1854 el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) demostró que ciertas sumas infinitas no son conmutativas, es decir, pueden ser reordenadas de tal modo que se obtenga un resultado diferente. Un ejemplo es la serie

$$1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\ldots,$$

cuya suma es 0,6931471..., pero que puede ser reordenada de modo que se obtenga cualquier resultado que se desee.



Georg Friedrich Bernhard Riemann hacia 1862.

cumplir esas condiciones. Pero Cantor encontró algunas dificultades a la hora de expresar esos requisitos de una manera concreta, exacta y elegante. Seguramente tenía una intuición muy precisa de cuáles eran esas particularidades que quería enunciar, pero se le escapaba el modo de transmitirlas en palabras claras y precisas.

CONJUNTOS DERIVADOS

Entre 1870 y 1872, Cantor publicó cinco artículos en los que fue dando forma definitiva a su solución para el problema de unicidad de la descomposición en series de Fourier. A lo largo de ese proceso descubrió, además, su respuesta para el problema del conti-

nuo y es por eso que su definición de los números reales mediante sucesiones fundamentales apareció publicada en el contexto de un trabajo sobre series trigonométricas.

¿Cómo pudo expresar Cantor la condición que deben cumplir las abscisas de los puntos de discontinuidad de un gráfico periódico para que su descomposición en serie de Fourier sea única? Para lograrlo, Cantor creó el concepto de *conjunto derivado*, un concepto muy relevante para nosotros porque fue el que le puso en el camino que lo condujo al artículo histórico de 1883. Veamos entonces qué es un conjunto derivado y cómo esa idea le permitió a Cantor resolver el problema que le había planteado Heine.

Para comenzar, recordemos que una sucesión consta de un primer número, luego otro, luego otro, y así siguiendo; y recordemos asimismo que para nuestros fines solo contarán las sucesiones formadas por infinitos números, todos diferentes entre sí.

«La obra de Cantor es el producto más bello del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad humana puramente intelectual.»

— **David Hilbert, matemático alemán.**

Pensemos en la colección de los números racionales. Es evidente que π, que es un número irracional, no pertenece a esa colección; sin embargo, aunque π no es racional, sí puede aproximarse por una sucesión de racionales. Es decir, es posible encontrar una sucesión formada exclusivamente por números racionales de modo tal que, a medida que se avanza por ella, esta nos va mostrando números cada vez más cercanos a π. Un ejemplo, que ya se expuso en el capítulo anterior, es la sucesión formada por 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;..., que se obtiene agregando en cada paso una cifra de la expresión decimal de π.

Lo que acabamos de decir para π vale para cualquier número irracional; cualquiera que sea el irracional que elijamos, siempre podrá aproximarse por una sucesión de racionales. Y también vale para los propios racionales; por ejemplo, si tomamos el número 0,75, entonces la sucesión 0,751; 0,7501; 0,75001; 0,750001;... se va

acercando a él tanto como se quiera. En resumen, cualquier número real puede aproximarse por sucesiones de racionales (que es, en esencia, la solución de Cantor para el problema del continuo).

Si P es un conjunto cualquiera de números, Cantor llamó *conjunto derivado de P* a la colección de todos los números que pueden aproximarse mediante sucesiones formadas por elementos de P; al conjunto derivado de P lo indicó como P'. Si llamamos $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales, el ejemplo anterior nos muestra que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ designa al conjunto de todos los números reales.

En sus artículos de comienzos de la década de 1870, Cantor planteó la definición de conjunto derivado en términos de infinitos potenciales. Sin embargo, la misma escritura $\mathbb{Q}'$ nos remite inmediatamente a un infinito en acto, dado que $\mathbb{Q}$ es la colección de *todos* los números racionales. Por otra parte, como ya observamos, la definición de $\mathbb{Q}'$ nos conduce a las sucesiones y a la definición de los números reales. Vemos así cómo el problema de las series trigonométricas guió a Cantor hacia los que serían los dos ejes fundamentales de sus investigaciones matemáticas posteriores: el infinito en acto y el problema del continuo.

LA CONDICIÓN DE UNICIDAD

Tomemos ahora el conjunto P formado únicamente por los números 0, 1 y 2; el conjunto P' contiene, según la definición de Cantor, a todos los números que se puedan aproximar mediante sucesiones formadas por infinitos elementos de P, todos diferentes entre sí. Pero es obvio que *no hay* infinitos elementos de P todos diferentes entre sí, porque P tiene solo tres elementos.

Como es imposible formar ni siquiera una sola sucesión de elementos de P, entonces en P' no hay nada; en esa situación, Cantor decía que P' se anula. En la terminología moderna de la teoría de conjuntos se diría que P' es el conjunto vacío, el que no tiene miembros, pero nosotros conservaremos la expresión original de Cantor.

EDUARD HEINE

Heinrich Eduard Heine nació en Berlín, Alemania, el 16 de marzo de 1821, y fue el octavo de nueve hermanos. En 1838 ingresó en la Universidad de Gotinga para estudiar matemáticas, pero al año siguiente pasó a la Universidad de Berlín, donde se doctoró el 30 de abril de 1842. Dos años más tarde comenzó a enseñar en la Universidad de Bonn y desde 1856, en Halle. En esta última universidad, donde era muy apreciado por la claridad de sus clases, Heine dictaba una gran variedad de cursos sobre diversas áreas del cálculo y de la física. Como investigador, además, hizo importantes aportes al problema de la fundamentación lógica del cálculo. Heine falleció en Halle el 21 de octubre de 1881.



Para entender la condición de unicidad que encontró Cantor, volvamos por un momento al ejemplo del derivado de $\mathbb{Q}$. Observemos que $\mathbb{Q}'$ es también un conjunto de números, y por lo tanto podemos calcular, a su vez, su derivado; Cantor escribía el derivado del derivado de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}''$. Y como $\mathbb{Q}''$ es también un conjunto, podemos calcular su derivado, que se escribe $\mathbb{Q}^{(3)}$; el derivado de este es $\mathbb{Q}^{(4)}$, y así sucesivamente.

En el caso de $\mathbb{Q}$, toda esta proliferación de derivados no nos conduce a nada interesante, porque puede demostrarse que $\mathbb{Q}'$, $\mathbb{Q}''$, $\mathbb{Q}^{(3)}$, $\mathbb{Q}^{(4)}$,... son todos el conjunto de los números reales y entonces, al seguir derivando no se obtiene nada nuevo. Sin embargo, hay ejemplos de conjuntos P, que no es necesario que desarrollemos aquí en detalle, en los cuales P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,... son todos conjuntos diferentes, o conjuntos tales que, a la larga, el proceso P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,... termina por anularse. Por ejemplo, es posible encontrar un conjunto P para el cual P' es la colección

formada por los números 0, 1 y 2; en ese caso, P'', que es el derivado de P', se anula. Aquí, la anulación se produce en P'', pero hay otros casos donde sucede en P', otros donde sucede en $P^{(3)}$, otros donde ocurre en $P^{(4)}$, y así sucesivamente. Desde luego, para $\mathbb{Q}$ el proceso jamás se anula, porque en todos los pasos obtenemos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

La condición de unicidad que encontró Cantor es la siguiente: si P es el conjunto de las abscisas de los puntos de discontinuidad de un gráfico periódico, para que su descomposición en serie trigonométrica sea única basta con que el proceso $P', P'', P^{(3)}, P^{(4)},\ldots$ acabe por anularse en algún momento. De esta manera, Cantor logró expresar de un modo claro y preciso la condición que asegura la unicidad de la descomposición en serie de Fourier y resolvió así el problema que le había propuesto Heine en 1869.

HACIA EL INFINITO

Como ya hemos citado anteriormente, en la década de 1860 Heine había demostrado que si un gráfico periódico no tiene discontinuidades, entonces su descomposición es única. De hecho, Heine también había probado que la descomposición era única si en cada período había solo una cantidad finita de discontinuidades. La solución de Cantor abarca estos dos resultados y los extiende al caso en que hay infinitas discontinuidades en cada período.

Por lo tanto, si no hay discontinuidades, entonces hay unicidad; si hay solo una cantidad finita de discontinuidades en cada período, entonces también hay unicidad. En la misma línea, Cantor conjeturaba que su resultado debería poder enunciarse más o menos como sigue: «si en cada período hay infinitas discontinuidades, pero "pocas", entonces hay unicidad». «Infinitas, pero pocas» parece una frase contradictoria, pero no para Cantor, porque para él «infinito pero poco» venía a significar «infinito numerable»; es decir, infinitas pero con un cardinal menor al de todos los números reales.

Cantor conjeturó entonces —y de hecho lo demostró en sus «Fundamentos para una teoría general de variedades» de 1883— que el proceso P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,... se anula en algún momento exactamente en los casos en que P y P' son ambos finitos o numerables. Pero Cantor ya había conjeturado este resultado en 1872. ¿Por qué tardó diez años en demostrarlo? En realidad, no fue la dificultad técnica del resultado lo que retrasó el hallazgo de la demostración, sino una barrera psicológica.

«La impresión que las memorias de Cantor hacen en nosotros es desastrosa. Leerlas nos parece a todos una completa tortura.»

— Charles Hermite, matemático francés, en **1883**.

Preguntémonos —como se preguntó Cantor— cuántos pasos pueden ser necesarios para que el proceso P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,... se anule. Ya dijimos que puede llegar a anularse en el primer paso, o en el segundo, o en el tercero, y así sucesivamente, pero la situación no es tan sencilla.

Para entenderlo, volvamos a la sucesión 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;... que, como ya sabemos, se aproxima cada vez más al número π. Para describir esta situación, suele decirse que la sucesión «se acerca a π en el infinito»; este «infinito» debe entenderse en forma potencial y quiere decir que los sucesivos números 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;... se aproximan a π tanto como se quiera, pero que de hecho nunca lo alcanzan.

Durante sus investigaciones, Cantor encontró un ejemplo en el que P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,... eran todos conjuntos diferentes sin que el proceso llegara a anularse en ninguna cantidad finita de pasos. Este ejemplo le permitió definir el conjunto $P^{(\infty)}$, donde ∞ —símbolo introducido por John Wallis en 1655— se usa habitualmente en el cálculo para representar un infinito en potencia. Así como los números 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;... se van pareciendo cada vez más a π, el conjunto $P^{(\infty)}$ es el conjunto al que se van pareciendo cada vez más las sucesivas colecciones P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$,...

Pero, en el ejemplo que mencionábamos antes, Cantor encontró, además, que $P^{(\infty)}$ estaba formado por los números 0, 1 y 2,

y su derivado, entonces, se anulaba. Pero, ¿quién es el derivado de $P^{(\infty)}$? Si el derivado de $P^{(3)}$ es $P^{(4)}$, y el derivado de $P^{(4)}$ es $P^{(5)}$, parece lógico decir que el derivado de $P^{(\infty)}$ es $P^{(\infty+1)}$; ¿pero entonces estamos diciendo que el proceso se anula al cabo de $\infty + 1$ pasos? ¿Qué significa «$\infty + 1$»?

De hecho, Cantor halló situaciones en las cuales el proceso se anulaba en el paso $\infty+2$, o $\infty+3$, o inclusive en el paso $\infty+\infty$; sin embargo, no le encontraba sentido a estos símbolos o, en realidad, un condicionamiento de muchos años, una barrera psicológica como dijimos antes, le impedía reconocerlos como lo que eran en realidad.

LAS NOTABLES ACLARACIONES

En el primer capítulo citamos la carta que le escribió Cantor a Dedekind en noviembre de 1882. Recordémosla:

> Dios Todopoderoso me ha concedido alcanzar las aclaraciones más notables e inesperadas en la teoría de conjuntos y en la teoría de números o, más bien, que encontrara aquello que ha fermentado en mí durante años y que he buscado tanto tiempo.

En esa carta, Cantor se refería a que en 1882 se dio cuenta finalmente de que esos símbolos ∞, $\infty+1$, $\infty+2,\ldots$, $\infty+\infty$, $\infty+\infty+1,\ldots$ representaban nada menos que *números infinitos*, números que permiten contar más allá de los naturales. Como primera medida, les asignó un nombre y un símbolo; llamó a estos números *ordinales* y para destacar que son infinitos en acto cambió el símbolo ∞, fuertemente asociado al infinito en potencia, por la letra griega ω (omega minúscula, la última letra del alfabeto griego).

¿Qué son los ordinales? Según dice Cantor en su trabajo de 1883, los ordinales surgen de dos principios de generación. El primer principio dice que todo ordinal tiene un sucesor, es decir, un ordinal que es el inmediatamente siguiente a él. El segundo

principio dice que dada cualquier sucesión de ordinales, siempre hay un ordinal que es el inmediatamente siguiente a todos ellos.

El primer ordinal es el número 0; su sucesor, desde luego, es el 1; luego vienen el 2, el 3, y así sucesivamente. Los números 0, 1, 2, 3,... son los ordinales finitos o, como decía Cantor, los ordinales de clase I.

El segundo principio de generación nos dice que después de la sucesión 0, 1, 2, 3, 4,... hay un ordinal que sigue inmediatamente a todos ellos; este es el ordinal ω, el primer ordinal infinito. Después vienen $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3,\ldots$; y aplicando otra vez el segundo principio de generación, después de esta nueva sucesión viene otro ordinal, que es $\omega+\omega$; y después de él vienen $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2,\ldots$

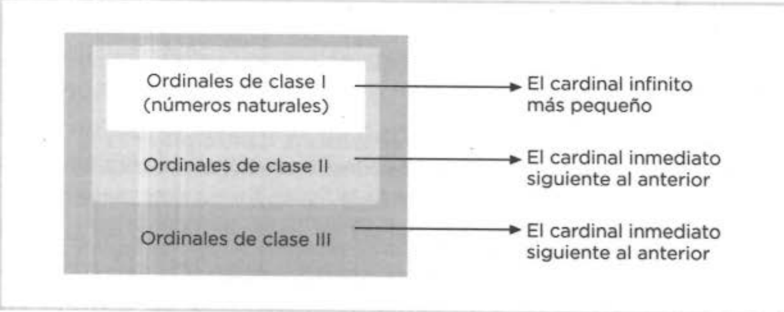
En resumen, la cuenta de los ordinales comienza de la siguiente manera: $0, 1, 2, 3,\ldots, \omega, \omega+1, \omega+2,\ldots, \omega+\omega+1, \omega+\omega+2,\ldots, \omega+\omega+\omega+1,\ldots$, y en todos los casos los puntos suspensivos representan una cantidad infinita de términos.

Volvamos al ordinal ω y pensemos ahora en el conjunto de todos sus predecesores, es decir, en el conjunto de todos los ordinales que son menores que él. Este conjunto está formado por los números 0, 1, 2, 3,... y, como es numerable, Cantor dice que ω es un ordinal de clase II. Los ordinales de clase I tienen un conjunto finito de predecesores, los de clase II tienen un conjunto numerable de predecesores.

El ordinal $\omega+1$, por ejemplo, también es de clase II porque sus predecesores son $0, 1, 2, 3,\ldots, \omega$, que forman un conjunto numerable. Los ordinales $\omega, \omega+1, \omega+2,\ldots, \omega+\omega+1, \omega+\omega+2,\ldots, \omega+\omega+\omega+1,\ldots$ son todos de clase II.

Pero pensemos ahora en la sucesión de todos los ordinales de clase II; por el segundo principio de generación, existe un ordinal que sigue inmediatamente a todos ellos. Este ordinal suele indicarse con el símbolo Ω, que es la letra omega mayúscula. La pregunta es: ¿a qué clase pertenece Ω?

En el artículo de 1883, Cantor pudo demostrar que todos los predecesores de Ω, es decir, las clases I y II, forman un conjunto no numerable; Ω no es, por lo tanto, de clase II; de hecho, Ω es el primer ordinal de clase III. Pero más importante todavía, Cantor



Cada vez que agregamos toda una clase de nuevos ordinales, pasamos al cardinal inmediato siguiente.

probó que al conjunto de las clases I y II le corresponde el cardinal que sigue inmediatamente al cardinal de los números naturales.

Observemos la elegancia del sistema de Cantor (véase la figura); el conjunto de los ordinales de clase I es numerable, su cardinal es el más pequeño de entre todos los cardinales infinitos. Si agregamos la clase II, obtenemos el cardinal inmediato siguiente; si agregamos la clase III, obtenemos el cardinal que sigue, y así sucesivamente con las clases IV, V,... En 1883, estos cardinales todavía no tenían un nombre. Como veremos en el próximo capítulo, Cantor se lo daría en 1895.

En sus «Fundamentos para una teoría general de variedades» Cantor dice que siempre intuyó que había cardinales mayores que el de los reales, pero que hasta ese momento no había sido capaz de hallar ningún ejemplo. Este sistema de los ordinales —la «hélice virtuosa de los ordinales y los cardinales», como la llama el historiador José Ferreirós— le permitió finalmente demostrar la existencia de una cantidad infinita de niveles de infinitud.

¿Dónde encaja en este sistema el cardinal de los reales? Tal como vimos, el cardinal inmediato al de los naturales se obtiene al agregar la clase II a la clase I; a su vez, la hipótesis del continuo, recordemos, dice que ese cardinal es el de los reales. Es decir, si la hipótesis del continuo fuera cierta, toda la teoría tendría una elegante coherencia, ya que la clase I nos daría el cardinal de los naturales y la clase II el de los reales.

Desde este descubrimiento, Cantor sintió que la hipótesis del continuo se volvía una pieza clave de su teoría y llegó casi hasta la obsesión en sus intentos de demostrarla, pero nunca lo logró

EL TERNARIO DE CANTOR

En uno de los artículos publicado en *Acta Mathematica*, Cantor presenta la definición de un conjunto, que es hoy conocido como el «ternario de Cantor», y que se define en pasos sucesivos. Observemos la figura. En el primer paso tenemos un segmento, que identificamos con el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1. En el segundo paso dividimos al segmento en tres partes iguales, y de ellas descartamos la parte central (segundo renglón en la figura). En el tercer paso, en cada una de las dos partes que quedaron antes repetimos el mismo proceso, las partimos en tres y descartamos la parte central; y así seguimos. El conjunto que queremos definir, el ternario de Cantor, está formado por todos los puntos que, al cabo de infinitos pasos, quedaron sin ser descartados. A primera vista, podría parecer que no quedó ningún punto; sin embargo, Cantor pudo demostrar que hay una correspondencia uno-a-uno entre el ternario y el conjunto de todos los números reales. En otras palabras, al cabo de infinitos pasos quedan sin descartar, en el sentido del cardinal, tantos puntos como los que hay en toda la recta.



y es posible que esta frustración se haya sumado a las causas de su depresión de mayo de 1884.

En realidad, Cantor no vivió para saber si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa; en el último capítulo dedicaremos un espacio a comentar la curiosa solución que tuvo este problema.

ASOMAN LAS PARADOJAS

Una objeción que se le hizo a Cantor en esa época es que sus ordinales, simplemente, no existían. Como respuesta, Cantor ofrecía su propia filosofía de las matemáticas, según la cual cualquier ob-

jeto que un matemático defina, por el mero hecho de ser definido, existe, con la única condición de que esa definición no conduzca a contradicciones lógicas. Pero, ¿es cierto que las propiedades de los ordinales no conducen a contradicciones? Volvamos al segundo principio de generación: dada cualquier sucesión de ordinales, siempre hay otro nuevo ordinal que es mayor que todos ellos. A la luz de este principio, si consideramos la sucesión formada por *todos* los ordinales, tiene que haber un nuevo ordinal mayor que todos ellos; pero, ¿cómo puede haber un nuevo ordinal si la sucesión ya contenía a *todos* los ordinales? Esto es una contradicción lógica, una paradoja que Cantor descubrió en 1882.

Para solucionar la contradicción, en el artículo de 1883 Cantor introdujo un tercer principio de generación de ordinales, que dice básicamente que el segundo principio no se puede aplicar a la sucesión completa de todos los ordinales. En definitiva, un parche que solucionaba el problema de la paradoja.

La existencia de contradicciones lógicas en una teoría matemática es siempre una mala noticia, porque indica que esta tiene un fallo en sus cimientos; y aunque la paradoja pueda ser solucionada, como hizo Cantor al agregar su tercer principio, su aparición constituye una llamada de alerta. Pero Cantor no se preocupó por la paradoja; más bien, podríamos decir que la recibió con alivio y alegría.

En el primer capítulo vimos que san Agustín, y como él muchos otros teólogos, entendían que el infinito era un atributo exclusivamente divino y que pretender que la mente humana es capaz de abarcarlo constituía una herejía. Esta idea pesaba mucho en el ánimo de Cantor, que siempre había sido una persona muy religiosa; pero la paradoja, según él entendía, lo liberaba finalmente de esa carga, de esa implícita acusación de hereje.

Cantor concibió la idea de que el infinito estaba dividido en dos niveles, el nivel inferior correspondía a lo transfinito y abarcaba el conjunto de los naturales, el de los reales, los ordinales de las clases I, II, III,... y en general todos los conceptos de los que hablaba su teoría, pero no el conjunto de *todos* los ordinales. Este conjunto caía en el nivel absoluto del infinito, el nivel superior reservado a la divinidad.

Según Cantor, la mente humana podía captar lo transfinito, pero la paradoja indicaba que el nivel absoluto, el de la divinidad, estaba fuera de su alcance. La paradoja, siempre según Cantor, no nacía de un fallo de la teoría, sino del intento de la mente humana por abarcar un concepto que está más allá de su comprensión. De este modo, al dejar un nivel de infinitud reservado exclusivamente a la divinidad, Cantor, el hombre antes que el matemático, pudo reconciliarse con su espíritu religioso. Como veremos en el último capítulo, donde volveremos a hablar de las contradicciones lógicas de la teoría de Cantor, muchos matemáticos, aun sus defensores, no estaban de acuerdo con él en esta interpretación de las paradojas.

CAPÍTULO 5

Los álef

Una mirada ingenua podría llevarnos a pensar que «infinito más infinito» es simplemente «infinito», y que no hay nada interesante que se pueda agregar al respecto. Pero en la segunda mitad de la década de 1890, Georg Cantor publicó un artículo en el que introdujo una notación para los cardinales infinitos basada en la letra hebrea álef y que le permitió desarrollar una «aritmética del infinito», una aritmética que nos muestra que sí hay mucho que decir acerca de cuánto es «infinito más infinito».

En la primera mitad del siglo XX, el físico alemán Max Planck (1858-1947) escribió:

> Una nueva teoría no se impone porque los científicos se convenzan de ella, sino porque los que siguen abrazando las ideas antiguas van muriendo poco a poco y son sustituidos por una nueva generación que asimila las nuevas ideas desde el principio.

Al escribir esta frase, Planck se refería en realidad a la mecánica cuántica, la teoría que revolucionó la física del siglo XX; sin embargo, también puede aplicarse perfectamente a la teoría de Cantor. En efecto, muchos matemáticos de la generación nacida en las últimas décadas del siglo XIX, ajenos a los prejuicios de sus mayores, vieron en la teoría del infinito matemático un desafío fresco y estimulante. Uno de los más destacados en este sentido fue David Hilbert, brillante matemático alemán nacido en 1862; así por ejemplo, cuando a principios del siglo XX el descubrimiento de varias paradojas en la teoría del infinito hizo tambalear la confianza que muchos tenían en ella, Hilbert se puso a la cabeza de la defensa de la teoría de Cantor.

Como otro ejemplo del apoyo de Hilbert a la teoría de Cantor, mencionemos que en el año 1900 Hilbert fue invitado a dar la conferencia inaugural del Segundo Congreso Internacional de

Matemáticas, celebrado en París, un puesto de honor que le fue ofrecido por los organizadores del congreso gracias a sus méritos académicos. Pues bien, en esa famosa conferencia Hilbert planteó 23 problemas matemáticos que no habían podido ser resueltos hasta ese momento y que —él entendía— iban a guiar la investigación matemática a lo largo del siglo XX; como homenaje y apoyo a Cantor, y para destacar la importancia de la teoría de conjuntos, Hilbert puso a la cabeza de su lista el problema de si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa (recordemos que la hipótesis del continuo es la conjetura que formuló Cantor en 1878 de que no existe un cardinal intermedio entre el de los naturales y el de los reales).

LA BASE DE LAS MATEMÁTICAS

Gracias a la influencia de la nueva generación de matemáticos, hacia 1890 la teoría de conjuntos y la teoría del infinito no solo comenzaron a ser aceptadas, sino que empezaron a convertirse en parte esencial de muchas de las nuevas ramas de las matemáticas que se desarrollaron a partir de esos años. Por citar solo dos ejemplos, digamos que las nociones conjuntistas —y muy particularmente la distinción entre conjuntos numerables y no numerables— son fundamentales en la teoría de la medida, una generalización del cálculo que fue iniciada en los últimos años del siglo XIX por los matemáticos franceses Émile Borel (1871-1956) y Henri Lebesgue (1875-1941). Por otra parte, las nociones conjuntistas son también esenciales para la topología, otra generalización del cálculo, iniciada hacia la misma época por el también francés Henri Poincaré (1854-1912), aunque el propio Poincaré, a causa de la proliferación de las paradojas, se transformaría después en uno de los detractores de la teoría de conjuntos.

También en los últimos años del siglo XIX comenzaba a tomar forma la idea de que la teoría de conjuntos podía ser el fundamento de todas las matemáticas. ¿Qué significa esto exactamente? Durante siglos el modelo de razonamiento matemático por exce-





FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Georg Cantor hacia 1894.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
El matemático francés Henri Lebesgue.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Émile Borel en 1929. Junto con Lebesgue, este matemático francés inició la generalización de que las nociones conjuntistas son la base de la teoría de la medida.

FOTO INFERIOR DERECHA:
En la década de 1890, Henri Poincaré afirmaba que las nociones conjuntistas son también necesarias para la topología.





lencia había sido la geometría clásica griega; pero no solamente eso, sino que se entendía que el modo más claro de pensar las nociones matemáticas era viéndolas como conceptos geométricos. Un número, por ejemplo, especialmente un número irracional, se veía como un segmento y las operaciones numéricas se entendían como construcciones; por mostrar un ejemplo de los muchos posibles, en su libro *Reglas para la dirección de la mente*, escrito en la década de 1620, René Descartes explica que multiplicar dos números —es decir, dos segmentos— consiste básicamente en construir el rectángulo que tiene a esos dos segmentos por lados; notemos que Descartes no dice, tal como pensaríamos hoy en día, que el producto de los lados nos permite calcular el área del rectángulo. Él dice que el rectángulo *es* el producto de los dos números; los conceptos y operaciones eran pensados como objetos y construcciones de naturaleza geométrica.

«Del paraíso que Cantor creó para nosotros nadie podrá expulsarnos.»

— **David Hilbert (1862-1943)**, matemático alemán.

Este dominio de la geometría fue desapareciendo de manera gradual a lo largo del siglo XIX, durante el proceso conocido como «aritmetización del cálculo» (véase el capítulo 3). Como resultado de este proceso, los conceptos matemáticos, sobre todo los conceptos del cálculo, dejaron de pensarse geométricamente y pasaron a basarse exclusivamente en los números. Pero si los números ya no eran pensados como segmentos, ¿qué eran entonces? Algunos matemáticos, entre ellos Richard Dedekind, vieron una respuesta a esta pregunta en la teoría de conjuntos; si las definiciones de los números y sus operaciones ya no podían apoyarse en conceptos geométricos, pensó Dedekind, entonces podrían basarse en nociones conjuntistas.

Como vimos en el capítulo anterior, en 1872 Dedekind ya había usado conceptos conjuntistas para definir a los números reales, pero esta definición presuponía la existencia de los racionales, que a su vez se definen en base a los números naturales.

FIG. 1



FIG. 2

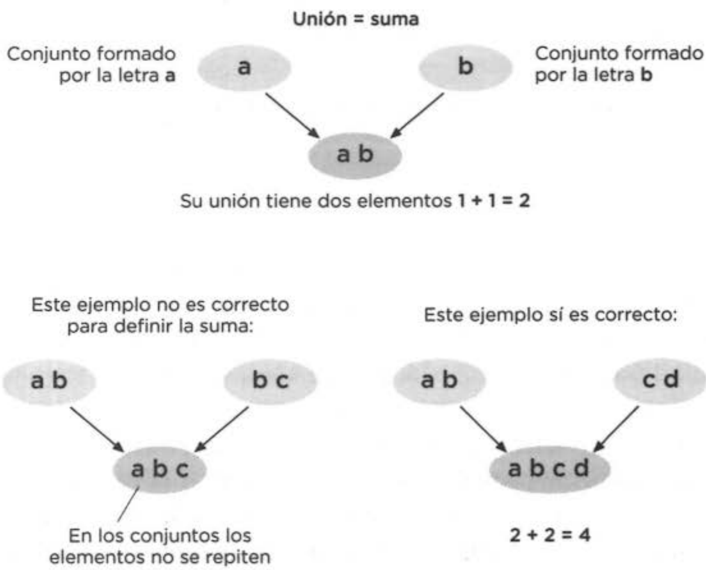


FIGURA 1: **Definiciones de los conjuntos numéricos. Una vez que se tiene una definición de los naturales, todos los demás conjuntos numéricos pueden definirse en pasos sucesivos a partir de ellos.**

FIGURA 2: **Para que la unión equivalga a la suma los dos conjuntos no deben tener elementos en común.**

¿Cómo definimos a los naturales, que son los que están al comienzo de toda esta cadena de definiciones (figura 1)?

Dedekind respondió a esta pregunta en un artículo titulado «Was sind und was sollen die Zahlen» [Qué son y para qué sir-

ven los números], publicado como monografía independiente en 1887. En este trabajo, Dedekind retoma la definición de la noción de conjunto que Cantor había dado en 1883 (a los conjuntos Dedekind los llama «sistema de elementos»), así como la definición de la unión de conjuntos. Para Dedekind, los números naturales son, simplemente, los cardinales de los conjuntos finitos; por ejemplo, define al número 0 como el cardinal del conjunto vacío (el conjunto que carece de elementos), el 1 es el cardinal de cualquier conjunto que tenga un único elemento, y así sucesivamente.

A su vez, la suma de números se define mediante la unión de conjuntos; por ejemplo, cuando enunciamos que $1+1=2$ —dice Dedekind—, estamos afirmando en realidad que si tenemos dos conjuntos diferentes, cada uno de ellos de cardinal 1, entonces su unión tiene cardinal 2 (figura 2, página anterior).

De la misma forma —dice Dedekind—, todas las nociones matemáticas pueden reducirse a nociones conjuntistas. Esta forma de pensar en las matemáticas como basadas totalmente en la teoría de conjuntos tuvo una enorme influencia a lo largo de todo el siglo XX e inclusive sigue siendo muy influyente en nuestros días; volveremos a este tema en el próximo capítulo.

LA UNIÓN MATEMÁTICA ALEMANA

Como vemos, la última década del siglo XIX comenzó con muy buenos augurios para Cantor; matemáticos jóvenes aceptaban, estudiaban y aplicaban su teoría del infinito, a la vez que Richard Dedekind proponía que la teoría de conjuntos se transformara nada menos que en la base de todas las matemáticas. A estas circunstancias se le sumó otro hecho muy auspicioso; en 1890 se creó la Unión Matemática Alemana y Cantor fue elegido como su primer presidente, cargo que ejerció hasta 1893.

La creación de la Unión Matemática Alemana fue el resultado de un intenso trabajo en el que Cantor (cuando ya se había recuperado de su depresión) tuvo una participación muy activa, y que

se desarrolló, a su vez, en el marco de la unificación política de Alemania.

¿Qué fue la unificación de Alemania? A comienzos del siglo XIX, la llamada Alemania estaba en realidad dividida en 38 estados, que aunque tenían un idioma, una cultura y una historia en común, eran políticamente independientes. El más poderoso de los estados era Prusia, y hacia 1860 su primer ministro, el «canciller de hierro» Otto von Bismarck, puso en marcha un proyecto de unificación, que incluyó tres conflictos bélicos, diversas alianzas políticas, y que culminó el 18 de enero de 1871 con la creación del Imperio alemán, una Alemania políticamente unificada bajo el gobierno del emperador Guillermo I, quien hasta ese momento había sido rey de Prusia.

«Quien haya experimentado solamente una vez el atractivo de la personalidad de Cantor, sabe que estaba llena de agudeza y de temperamento, de ingenio y originalidad.»

— ARTHUR MORITZ SCHOENFLIES (1853-1928), MATEMÁTICO ALEMÁN.

Sin embargo, a fines de la década de 1880 Cantor y otros colegas, entre ellos el reconocido geómetra Felix Klein (1849-1925), notaban que, aunque habían pasado casi veinte años desde la unificación política de Alemania, todavía existían muchas envidias y rivalidades regionales que impedían una genuina colaboración a nivel nacional; y es por eso que trabajaron en la creación de una sociedad que agrupara en su seno a todos los matemáticos alemanes. Como dijimos antes, este proyecto se concretó en 1890 y Cantor fue el primer presidente de esa asociación.

La primera reunión de la Unión Matemática Alemana se celebró en septiembre de 1891 y, en un gesto de reconciliación hacia su viejo enemigo, Cantor invitó personalmente a Kronecker a que dictara allí una conferencia. Kronecker aceptó, pero por desgracia no pudo asistir porque en agosto su esposa sufrió un grave accidente y al mes siguiente falleció; en realidad, Kronecker la sobrevivió muy poco tiempo, hasta el 29 de diciembre de ese mismo año, día en que falleció él también.

EL REGRESO

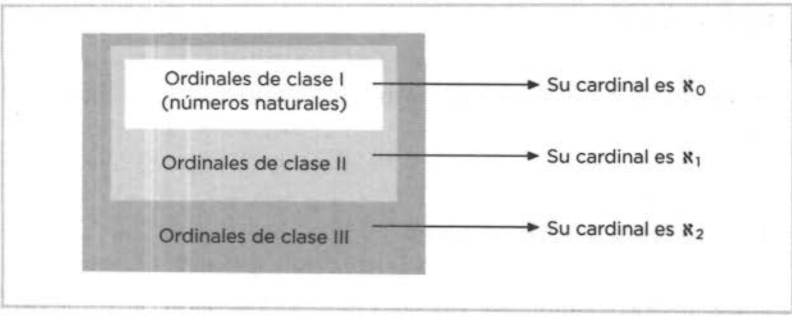
Recuperado de su depresión y reconciliado con el mundo científico, en la década de 1890 Cantor retomó sus investigaciones matemáticas, y como resultado de ellas dio a conocer dos artículos, los dos últimos que publicó en su vida. El primero, titulado «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre» [Sobre una cuestión elemental de la teoría de variedades], se publicó en 1892 en el primer *Informe anual de la Unión Matemática Alemana.*

El segundo de estos artículos, uno de sus trabajos más famosos, fue publicado en dos partes, la primera en 1895 y la segunda en 1897, ambas incluidas en la revista *Mathematische Annalen*, bajo el título «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre» [Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos] (para el significado de la palabra «transfinito», véase el capítulo anterior).

Nos dedicaremos ahora a analizar el contenido de estos dos artículos; aunque lo haremos invirtiendo el orden cronológico.

El historiador José Ferreirós dice, con justicia, que «Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos» es el «testamento científico de Cantor»; en efecto, en este trabajo Cantor retoma todos los conceptos básicos de su teoría del infinito, en especial las nociones de cardinal y de ordinal, y estudia sus propiedades y sus relaciones mutuas.

Una de las innovaciones que Cantor introdujo en este artículo es su famosa notación de los álef para designar a los cardinales infinitos. Álef, $\aleph$, es la primera letra del alfabeto hebreo, y Cantor llamó $\aleph_0$ (léase álef-sub-cero o también álef-cero) al primer cardinal infinito, que es el que corresponde al conjunto de los naturales así como a cualquier otro conjunto numerable; $\aleph_1$ es el segundo cardinal infinito, $\aleph_2$ es el tercer cardinal infinito, y así sucesivamente. Relacionándolo con lo visto en el capítulo anterior, podemos decir entonces que el conjunto de todos los ordinales de clase I —es decir, el conjunto de los números naturales— tiene cardinal $\aleph_0$, al agregar los ordinales de clase II pasamos a tener un conjunto de cardinal $\aleph_1$, al agregar los ordinales de clase III ob-



Cada vez que agregamos toda una clase de nuevos ordinales, pasamos al cardinal inmediato siguiente.

tenemos un conjunto de cardinal $\aleph_2$, y así sucesivamente (véase el esquema).

> «El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño.»
>
> — Del cuento *El Aleph*, de Jorge Luis Borges.

Con esta nueva notación, el problema de saber si la hipótesis del continuo es verdadera —es decir, si es correcta la conjetura de Cantor de que no existe un cardinal intermedio entre el de los naturales y el de los reales— se transforma en la pregunta de si el cardinal de los reales es igual a $\aleph_1$ (notemos que el menor cardinal infinito es $\aleph_0$ y que $\aleph_1$ es el inmediato siguiente a él; sabemos

¿CUÁNTOS ÁLEF EXISTEN?

La secuencia de los álef comienza con $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... Pero, ¿cuántos álef hay? ¿Hay uno por cada número natural y, en consecuencia, son numerables? En realidad, los subíndices son ordinales. Después de los infinitos $\aleph_n$ donde *n* recorre todos números naturales, vienen $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+1}$,..., $\aleph_{\omega+\omega}$, $\aleph_{\omega+\omega+1}$,... y así sucesivamente. La respuesta a la pregunta es, entonces, que hay tantos cardinales infinitos como ordinales (incluyendo entre estos a los ordinales de todas las clases).

además que el cardinal de los reales no es $\aleph_0$, porque los reales no son numerables; por lo tanto, si el cardinal de los reales no es $\aleph_1$, entonces la única alternativa es que sea mayor que él).

ARITMÉTICA TRANSFINITA

En sus «Contribuciones», Cantor retoma el trabajo de Dedekind de 1887, aunque sin hacer mención explícita de él, y tal como hizo Dedekind, entiende a los números naturales como los cardinales de los conjuntos finitos, y define su suma mediante la operación de unión. Pero Cantor, además, extiende esta idea a los cardinales infinitos y es así como establece la que él denomina, y es así como se llama todavía hoy, una *aritmética transfinita*.

Veamos algunos ejemplos de operaciones de esta aritmética transfinita. Comencemos por recordar que, desde el punto de vista conjuntista, el hecho de que $1+1$ sea igual a 2 significa que si unimos dos conjuntos diferentes, ambos de cardinal 1, obtenemos un conjunto de cardinal 2. Otra forma de expresarlo es diciendo que si a un conjunto de cardinal 1 le agregamos un objeto nuevo, obtenemos como resultado un conjunto de cardinal 2. Siguiendo la misma idea, si, por ejemplo, a los números naturales (que tienen cardinal $\aleph_0$) les agregamos el número -1, obtenemos el conjunto $-1, 0, 1, 2, 3, 4,\ldots$, que es coordinable con los naturales y, por lo tanto, tiene también cardinal $\aleph_0$ (recordemos que si dos conjuntos son coordinables, entonces tienen el mismo cardinal). En resumen, al agregar un objeto nuevo a un conjunto de cardinal $\aleph_0$ obtenemos otro conjunto de cardinal $\aleph_0$; en términos de la aritmética transfinita, esto nos dice que $\aleph_0+1=\aleph_0$ (figura 3).

De manera similar, puede probarse que si a un conjunto de cardinal $\aleph_0$ le agregamos dos objetos, obtenemos nuevamente un conjunto de cardinal $\aleph_0$, es decir, $\aleph_0+2=\aleph_0$; y también vale que $\aleph_0+3=\aleph_0$, que $\aleph_0+4=\aleph_0$, y así sucesivamente para todos los números naturales. En definitiva, estas igualdades nos están diciendo que si a un conjunto numerable le agregamos una cantidad finita de objetos volvemos a obtener un conjunto numerable.

FIG. 3

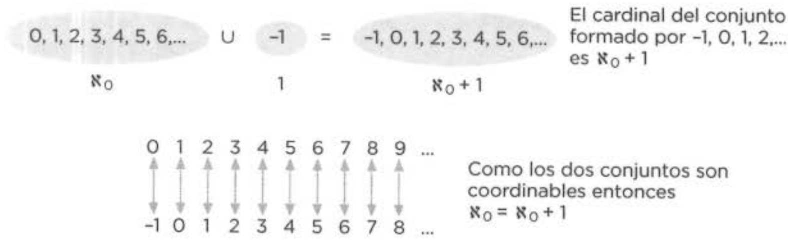
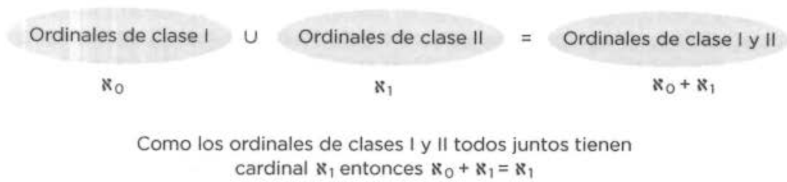


FIG. 4



¿Qué ocurre con $\aleph_0 + \aleph_0$? En otras palabras, ¿qué cardinal obtenemos si unimos dos conjuntos numerables? En el capítulo anterior dijimos que en sus «Contribuciones», Cantor demuestra que la unión de dos conjuntos numerables es también un conjunto numerable; un ejemplo está dado por la unión de los naturales con el conjunto formado por los números negativos –1, –2, –3, –4,..., que da como resultado a los enteros. Podemos decir entonces que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Veamos un último ejemplo; ya se ha expuesto que el conjunto de los ordinales de clase I (que son los naturales) tiene cardinal $\aleph_0$ y que si agregamos los ordinales de clase II (que comienzan con ω, $\omega+1$, $\omega+2$,...) obtenemos un conjunto de cardinal $\aleph_1$; pero Cantor además demostró que el conjunto de los ordinales de clase II por sí solo también tiene cardinal $\aleph_1$. En resumen, si a un conjunto de cardinal $\aleph_1$ (los ordinales de clase II por sí solos) le agregamos un conjunto de cardinal $\aleph_0$ (los ordinales de clase I), obtenemos un conjunto de cardinal $\aleph_1$ (los ordinales de clase I y II todos juntos); en términos de la aritmética transfinita, esto nos dice que $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ (figura 4).

PRODUCTO DE CARDINALES

Dentro de la aritmética transfinita, además de la suma, puede definirse el producto de cardinales; para esta definición se apela al llamado *producto cartesiano* de conjuntos. Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, su producto cartesiano, que se escribe $A \times B$, se define como el conjunto formado por todos los pares cuyos primeros miembros son elementos de A y cuyos segundos miembros son elementos de B. Tal como es muy habitual en los textos de teoría de conjuntos, al par formado, por ejemplo, por los números 1 y 2 lo indicaremos como (1,2). Es importante hacer notar que el orden en que se escriben los elementos es relevante ya que, por ejemplo, no es lo mismo el par (1,2) que el par (2,1); es por esa razón que en este contexto suele hablarse de *pares ordenados*. De esta forma, si A es el conjunto formado por los números 0 y 1, mientras que B es el conjunto formado por los números 2, 3 y 4, entonces $A \times B$ es el conjunto formado por los pares (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4). Nótese que A tiene cardinal 2; B tiene cardinal 3; mientras que $A \times B$ tiene cardinal 6. Tal como queda sugerido en el ejemplo anterior, el producto del cardinal de A por el cardinal de B se define como el cardinal de $A \times B$ (a diferencia de lo que sucede con la suma, no hay ningún inconveniente en que los conjuntos A y B tengan elementos en común). ¿Cuánto es, por ejemplo, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$? Si tomamos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales (cuyo cardinal, como sabemos, es $\aleph_0$), la definición anterior nos dice que $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ es el cardinal de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (el conjunto de todos

En realidad, puede probarse que si se suma dos veces un mismo cardinal infinito el resultado es otra vez ese mismo cardinal (como en el caso de $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$), y que si se suman dos cardinales infinitos diferentes, entonces el resultado es el mayor de los dos (como $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$). En consecuencia, por ejemplo, podemos afirmar que $\aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$ y que $\aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_2$.

CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Nuestra intención es hablar de otra operación de la aritmética transfinita, pero antes será necesario introducir algunos conceptos. Como decíamos en el capítulo anterior, un conjunto debe pen-

los pares de números naturales). Vamos a probar a continuación que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en realidad es numerable.

Desarrollo

Para probar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, comenzamos escribiendo a todos los pares que lo forman en una sucesión. Primero escribimos el único par cuya suma es 0, luego los pares cuya suma es 1, luego aquellos cuya suma es 2, y así sucesivamente:

$$(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0),...$$

Esta escritura nos permite establecer una correspondencia uno-a-uno entre los números naturales «individuales» y los pares de números naturales:

(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9...

Esta correspondencia demuestra que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, es decir, que su cardinal es $\aleph$. Tenemos así que, por un lado, la definición del producto de cardinales nos dice que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tiene cardinal $\aleph_0 \cdot \aleph_0$. Por otro lado, acabamos de probar que el cardinal de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es $\aleph_0$. Deducimos que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

sarse como un objeto en sí mismo diferente de los miembros que lo forman. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, e *I*, el conjunto de los números irracionales, son cada uno de ellos un solo objeto. Podemos considerar entonces el conjunto cuyos miembros son solamente esos dos objetos $\mathbb{Q}$ e *I*, conjunto que convendremos en llamar *D*. Vale la pena insistir en que los miembros de *D* son solamente *dos* objetos, $\mathbb{Q}$ e *I*; es decir, su cardinal es 2. No debemos confundir a *D* con la unión de $\mathbb{Q}$ e *I*, que se obtiene reuniendo en un todo a los miembros de esos dos conjuntos y que da como resultado al conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales. El número 3/2, por ejemplo, es miembro de $\mathbb{Q}$ y también de $\mathbb{R}$, pero no es miembro de *D*.

Podemos hacer una analogía entre esta situación y el conjunto formado por los planetas del sistema solar; este conjunto,

ARITMÉTICA ORDINAL

No debe confundirse la aritmética de los cardinales con la aritmética de los ordinales; los cardinales están asociados a la idea de cantidad y su suma se relaciona con la idea de agregar elementos. Por lo tanto, como acabamos de ver, $\aleph_0+1=\aleph_0$, es decir, $\aleph_0+1$ no es mayor que $\aleph_0$. Los ordinales, en cambio, están asociados al concepto de «posición que se ocupa en una sucesión» y su suma se relaciona con la idea de avanzar a lo largo de esa sucesión. Así por ejemplo, $\omega+1$ representa la posición inmediata siguiente a ω y es por eso que $\omega+1$ sí es mayor que ω. En sus «Contribuciones», Cantor desarrolla también una aritmética de los ordinales pero, por razones de espacio, no nos dedicaremos a ella en este texto.

llamémoslo S, tiene ocho miembros, Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Por otra parte, la Tierra en sí misma puede pensarse como un conjunto que nos contiene a nosotros, seres humanos, como miembros; nosotros somos miembros de la Tierra, pero no de S, porque no somos planetas del sistema solar. Desde el punto de vista de S, cada planeta es un objeto en sí mismo, sin importar cómo esté formado. De la misma manera que en el caso del sistema solar, el conjunto D que definimos antes tiene dos miembros, y no toma en cuenta lo que haya dentro de ellos.

Pensemos ahora en conjuntos que estén formados por números naturales. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ formado por todos los naturales, el conjunto de los números pares, el de los impares, el de los primos, el conjunto formado solo por el número 45, el formado por todos los números terminados en 8, el formado solamente por los números 5, 7 y 22, y muchísimos otros, cada uno de los cuales, igual que como antes hicimos con $\mathbb{Q}$ e I, debe ser pensado como un objeto en sí mismo.

Podemos considerar entonces el conjunto cuyos miembros son *todos* los conjuntos que se pueden formar usando números naturales, tanto los que hemos mencionado antes como todos los demás conjuntos posibles; este nuevo conjunto suele llamarse

Conjunto formado por los números 2 y 34 →	{2, 34}	Estos son algunos miembros de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
Conjunto formado por los números pares →	{0, 2, 4, 6, 8,...}	
Conjunto vacío (que no tiene miembros) →	{ }	
Conjunto de los números primos →	{2, 3, 5, 7, 11, 13,...}	

Algunos conjuntos formados por números naturales.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que se lee «partes de $\mathbb{N}$», y sus miembros son, en consecuencia, conjuntos, no números.

El conjunto de todos los números pares es un miembro de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y también el conjunto formado por el número 2; pero el número 2 en sí mismo no es miembro de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, porque los miembros de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son conjuntos, no números. Aparece aquí una diferencia, sutil pero importante, que debe hacerse en la teoría de conjuntos, no es lo mismo el número 2 que el conjunto *formado* por el número 2. Para resaltar esta diferencia el conjunto formado por el 2 se suele indicar como {2}; el uso de las llaves nos permite mostrar en la escritura la diferencia entre 2, que se refiere al número, y {2}, que se refiere al conjunto formado por ese número.

De la misma manera, por ejemplo, el conjunto formado por los números 2 y 34 se suele indicar como {2, 34} y el conjunto de los números pares, como {0, 2, 4, 6, 8,...} (véase la figura). Con esta notación, el conjunto D que mencionábamos antes, cuyos miembros son los conjuntos $\mathbb{Q}$ e I, se escribiría $\{\mathbb{Q}, I\}$.

UNOS Y CEROS

La pregunta que vamos a analizar, y que Cantor responde en su artículo de 1892, es: ¿cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Para responderla, debemos hallar primero un modo conveniente de representar a los conjuntos formados por números naturales.

Comencemos por observar que para definir un conjunto de números es suficiente con saber qué números son los que pertene-

cen al conjunto y cuáles no pertenecen a él. Para ejemplificar esta idea, imaginemos un juego entre dos personas, Alicia y Bruno; Alicia piensa un conjunto y Bruno debe adivinar cuál es y para ello va nombrando, en orden, los sucesivos números naturales, 0, 1, 2, 3, 4,...; en cada caso, Alicia le responde con un «sí», si el número mencionado pertenece al conjunto que ella pensó, y con un «no» en caso contrario.

Por ejemplo, si las respuestas de Alicia son: no, sí, no, sí, no, sí, no, sí,... Bruno puede concluir que el conjunto en cuestión es el de los números impares; si las respuestas son todas sí, el conjunto es ℕ; para el conjunto de los primos, las respuestas serían no, no, sí, sí, no, sí, no, sí, no, no, no, sí,...

Para abreviar, podemos reemplazar cada «sí» por un 1 y cada «no» por un 0; de este modo, cada conjunto formado por números naturales queda caracterizado por una secuencia infinita de ceros y unos. Reescribiendo las respuestas anteriores de Alicia, el conjunto de los números impares está representado por la secuencia 010101...; al conjunto ℕ le corresponde la 11111,... y al conjunto de los números primos le corresponde 001101010001...

En resumen, a cada secuencia infinita de ceros y unos le corresponde un conjunto y, recíprocamente, a cada conjunto le corresponde una secuencia infinita de ceros y unos. Esta correspondencia uno-a-uno implica que es lo mismo preguntarse por el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que por el cardinal de todas las secuencias infinitas de ceros y unos (véase la figura).

En su artículo de 1892 («Sobre una cuestión elemental de la teoría de conjuntos»), Cantor demuestra básicamente dos hechos, y el primero de ellos es que el conjunto de todas las secuencias de

Correspondencia uno-a-uno entre conjuntos y secuencias de ceros y unos.

Conjuntos de naturales		Secuencias de ceros y unos
Conjunto formado por los números 2 y 34	⟷	0011000000000000000...
Conjunto formado por los números pares	⟷	1010101010101010101010...
Conjunto vacío (que no tiene miembros)	⟷	000000000000000000...
Conjunto de los números primos	⟷	0011010100010100010100...

ceros y unos no es numerable; por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tampoco lo es. Para probarlo, Cantor utiliza el argumento diagonal, el mismo que usamos en el capítulo 2 para mostrar que $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los reales, no es numerable. En realidad, como ya comentamos en aquella ocasión, el argumento diagonal apareció por primera vez en este trabajo de 1892; la demostración que Cantor hizo en 1874 del hecho de que $\mathbb{R}$ no es numerable seguía ideas diferentes y se basaba en su definición de los reales.

La demostración de que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable repite exactamente el mismo razonamiento que mostramos en el capítulo 2 para los reales, por lo que no la reiteraremos aquí. Sí vale la pena aclarar que el hecho de demostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$ no son numerables, aun cuando en ambos casos se use el mismo razonamiento, no nos garantiza que los dos conjuntos tengan el mismo cardinal. El argumento diagonal demuestra en realidad un resultado negativo, nos permite asegurar que ni $\mathbb{R}$ ni $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tienen cardinal $\aleph_0$, pero no nos dice qué cardinal tiene cada uno de ellos ni nos permite deducir que ambos cardinales sean iguales.

Ahora bien, el segundo hecho que Cantor demuestra en su artículo de 1892 es que, después de todo, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$ sí tienen el mismo cardinal pero, insistimos, este hecho requiere una demostración, no se deduce del argumento diagonal. Hay que probar entonces que $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son coordinables o, lo que es lo mismo, que $\mathbb{R}$ es coordinable con el conjunto de todas las secuencias infinitas de ceros y unos.

Para probarlo, empecemos por recordar que el modo en que habitualmente anotamos los números naturales se llama *escritura en base 10*, porque usa diez cifras y además se basa fuertemente en las potencias del número 10; por ejemplo, cuando escribimos el número 235, estamos escribiendo en realidad $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$ (recordemos que $10^1 = 10$ y que $10^0 = 1$). Algo similar sucede con los números que no son enteros, solo que en ese caso intervienen potencias de exponente negativo, tales como 10^{-1}, que es igual a 0,1; 10^{-2}, que es igual a 0,01; y así sucesivamente. Por ejemplo, cuando escribimos 0,76, estamos escribiendo en realidad $7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$. Es interesante mencionar que los números con infinitas cifras decimales, como 0,3333…,

se traducen en series, es decir, en sumas infinitas; en efecto $0{,}333\ldots = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \ldots$

Aunque la escritura en base 10 es la más usada, no es la única posible; por ejemplo, los números pueden escribirse en base 2, también llamada *escritura binaria*. Esta base, como su nombre indica, usa solamente dos cifras, 0 y 1, y se apoya en las potencias de 2. Como muestra, el número 13 en base 2 se escribe 1101 porque $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. E igual que en el caso anterior, esta escritura se extiende a números no enteros; por ejemplo, en base 2 el número 0,333... se escribe 0,01010101... porque la suma infinita $0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6}$ da como resultado 0,333... (este último escrito en base 10).

> «Las nociones de la teoría de conjuntos son instrumentos conocidos e indispensables.»
>
> — Jacques Hadamard, matemático francés (1865-1963), en una conferencia dictada en 1897.

Vamos a probar ahora que el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1, que es un segmento de la recta numérica, es coordinable con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; es decir, debemos lograr que cada número entre 0 y 1 quede asociado exactamente con un conjunto de números naturales. Para mostrarlo, tomemos el número 0,333... ¿Cómo hallamos el conjunto que le corresponde? Como se muestra en el esquema, primero escribimos el número en base 2 y obtenemos así la expresión 0,01010101...; de esa expresión nos quedamos con la secuencia de cifras detrás de la coma, en este caso 010101... y vemos qué conjunto le corresponde a esa secuencia. Como el conjunto es el de los números impares, entonces al 0,333... le corresponde ese conjunto.

Número real en base 10		Número real en base 2		Secuencia de ceros y unos		Conjunto formado por números naturales
0,33333...	⟷	0,01010101...	⟷	01010101...	⟷	{1, 3, 5, 7, 9,...}
0,1875	⟷	0,001100000...	⟷	001100000...	⟷	{2, 3}

Correspondencia uno-a-uno entre números reales (ubicados entre 0 y 1) y conjuntos formados por números naturales.

Recíprocamente, si tenemos un conjunto, por ejemplo el formado por los números 2 y 3, y queremos saber qué número le corresponde, transformamos primero al conjunto en una secuencia de ceros y unos, en este caso queda 00110000..., y pensamos en esa secuencia como las cifras detrás de la coma de un número escrito en binario; en este caso, el número es 0,001100000... que, traducido a base 10, equivale a 0,1875. Entonces, al conjunto formado por los números 2 y 3 le corresponde el número 0,1875.

De este modo vemos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con el conjunto de todos los números entre 0 y 1, pero dijimos en el capítulo 3 que este último conjunto es coordinable con $\mathbb{R}$ (cualquier segmento es coordinable con toda la recta); por lo tanto, deducimos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con $\mathbb{R}$. Finalmente, a la pregunta de cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, en 1892 Cantor respondió que el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el mismo que el de $\mathbb{R}$.

POTENCIAS

Anteriormente dijimos que íbamos a hablar de otra operación de la aritmética transfinita, vamos a hacerlo ahora.

Volvamos a las secuencias de ceros y unos, pero por el momento pensemos solamente en secuencias finitas. ¿Cuántas secuencias de ceros y unos podemos formar si estas solo pueden tener dos cifras en total? La respuesta es que hay exactamente cuatro secuencias así, que son 00, 01, 10 y 11. Si las cifras son tres, hay ocho secuencias, 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111, y para cuatro cifras hay dieciséis. Para una cifra solo hay dos, que son simplemente 0 y 1.

Tenemos así que hay 2^1 secuencias de una cifra, 2^2 secuencias de dos cifras, 2^3 secuencias de tres cifras, y así sucesivamente. Parece lógico suponer que para las secuencias de «$\aleph_0$ cifras» el cardinal correspondiente sea $2^{\aleph_0}$.

En efecto, en sus «Contribuciones» Cantor define una potenciación de cardinales y se basa para ello en una idea que él llama *cubrimiento*. Cuando formamos una secuencia infinita de ceros

y unos —dice Cantor—, estamos cubriendo cada elemento de ℕ con un 0 o con un 1:

0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8...

Preguntarnos por el cardinal del conjunto de todas las secuencia infinitas de ceros y unos es hacerlo por todos los modos posibles de cubrir a ℕ usando dos elementos. Todos los modos de cubrir a los números 0, 1 y 2 usando dos elementos es 2^3, todos los modos de cubrir a los números 0, 1, 2 y 3 usando dos elementos es 2^4; entonces, por definición, según Cantor, el cardinal de todos los modos de cubrir a ℕ con dos elementos es $2^{\aleph_0}$. Y como el conjunto de todas las secuencias de ceros y unos es coordinable con ℝ, concluimos entonces que el cardinal de ℝ es también $2^{\aleph_0}$; por lo tanto, otro modo de enunciar el problema de la hipótesis del continuo es con la pregunta: ¿será $2^{\aleph_0}$ igual a $\aleph_1$?

Observemos ahora que si estuviéramos cubriendo a ℕ con tres elementos obtendríamos el cardinal $3^{\aleph_0}$; en otras palabras, el conjunto de todas las secuencias infinitas de ceros, unos y doses tiene cardinal $3^{\aleph_0}$. Pero no hay que confundirse. A primera vista podríamos pensar que $3^{\aleph_0}$ es mayor que $2^{\aleph_0}$; sin embargo, no es así, en realidad $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0}$. Para probarlo, basta ver que el conjunto de las secuencias de ceros y unos es coordinable con el conjunto de las secuencias de ceros, unos y doses; la idea que hay detrás de esta demostración es que, así como las secuencias de ceros y unos pueden verse, en esencia, como números escritos en base 2, de la misma forma las secuencias de ceros, unos y doses pueden verse como números escritos en base 3. La correspondencia entre ambos conjuntos se obtiene entonces mediante un cambio de base.

Tomando la definición de la potencia de cardinales podemos decir que, dado que el cardinal de los ordinales de clase II es $\aleph_1$, entonces para esos ordinales hay $2^{\aleph_1}$ cubrimientos posibles; y aunque parece obvio que $2^{\aleph_1}$ sí es mayor que $2^{\aleph_0}$, este hecho aún no ha podido ser demostrado. Es interesante destacar que la afirmación $2^{\aleph_1}$ es mayor que $2^{\aleph_0}$ realmente necesita ser demostrada, no pode-

mos simplemente decir que, como $\aleph_1$ es mayor que $\aleph_0$, entonces es obvio que $2^{\aleph_1}$ debe ser mayor que $2^{\aleph_0}$, porque ya vimos que 3 es mayor que 2, pero que, no obstante, $3^{\aleph_0}$ no es mayor que $2^{\aleph_0}$; la conclusión es que, cuando del infinito se trata, lo que parece obvio no siempre es verdadero.

¿Cómo puede visualizarse un cubrimiento de los ordinales de clase II? Observemos que, dado que hay una cantidad $\aleph_1$ de ordinales de clase II, cada uno de sus cubrimientos contendrá una cantidad $\aleph_1$ de cifras; es decir, una cifra por cada ordinal:

0	1	0		0	0		1	
ω	$\omega+1$	$\omega+2$	...	$\omega+\omega$	$\omega+\omega+1$	...	$\omega+\omega+\omega$	...

Ahora bien, los cubrimientos de los ordinales de clase II tienen, en general, una complejidad que es muchísimo mayor que la de los cubrimientos de $\mathbb{N}$. En efecto, por ejemplo, para definir un cubrimiento de $\mathbb{N}$ podemos decir simplemente que «comienza con 01 y después sigue repitiendo esas dos mismas cifras»; esta definición caracteriza totalmente al cubrimiento 010101..., dado que con solo esa regla podemos sabemos con qué cifra, 0 o 1, debemos cubrir a cada número natural.

Pero esa misma definición no es suficiente para definir completamente un cubrimiento de los ordinales de clase II, y la causa es que estos tienen un ordenamiento que es mucho más complejo

LA HIPÓTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO

La hipótesis del continuo es la conjetura de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, algo que Cantor nunca pudo demostrar ni refutar. La llamada hipótesis generalizada del continuo es una conjetura que extiende a la anterior y que fue formulada por Cantor en sus «Contribuciones». Esta conjetura afirma que, no solamente $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, sino que además $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$, $2^{\aleph_3} = \aleph_4$, y así sucesivamente. Como dijimos antes, Cantor nunca llegó a saber en vida si estas conjeturas eran ciertas o no.

que el de los naturales. Según vimos en el capítulo anterior, los ordinales de clase II comienzan con ω, $\omega+1$, $\omega+2,\ldots$, tras infinitos pasos viene $\omega+\omega$, $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2,\ldots$ y tras infinitos pasos viene $\omega+\omega+\omega,\ldots$ y tras infinitas veces infinitos pasos viene $\omega+\omega+\omega+\omega\ldots$ (infinitas veces ω), $\omega+\omega+\omega+\omega\ldots$(infinitas veces ω)$+1,\ldots$, y así sucesivamente.

De modo que si decimos de un cubrimiento de los ordinales de clase II que «comienza con 01 y después sigue repitiendo esas dos mismas cifras», esa definición solo nos dirá cómo proceder con la primera parte de la secuencia ω, $\omega+1$, $\omega+2,\ldots$ Al saltar a $\omega+\omega$ tenemos que indicar el modo de recomenzar el cubrimiento, que puede ser otra vez con 01 o de cualquier otro modo; y otra vez tendremos que indicar un comienzo al llegar a $\omega+\omega+\omega$, y otra vez en $\omega+\omega+\omega+\omega$, y así sucesivamente. Si todas las veces decidimos recomenzar con 01, el cubrimiento resultante podría visualizarse como el cubrimiento «básico» de $\mathbb{N}$ 010101… repetido una y otra vez una cantidad no numerable de veces.

LA PARADOJA DE CANTOR

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene como miembros a todos los conjuntos que se pueden formar con elementos de $\mathbb{N}$; esta idea, por supuesto, puede generalizarse. Si A es un conjunto cualquiera, se llama $\mathcal{P}(A)$, que se lee «partes de A», al conjunto que tiene como miembros a todos los conjuntos que se pueden formar con elementos de A. Y así como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene cardinal $2^{\aleph_0}$, de la misma manera puede probarse que $\mathcal{P}(A)$ tiene cardinal «2 elevado al cardinal de A». Si la hipótesis del continuo fuera cierta, entonces el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sería $2^{\aleph_1}$.

Sabemos que $\mathbb{N}$ es numerable y que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no lo es; en otras palabras: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene un cardinal que es mayor que el de $\mathbb{N}$. Esto también puede generalizarse; en efecto, el llamado *teorema de Cantor* afirma que $\mathcal{P}(A)$ tiene siempre un cardinal mayor que A.

Una consecuencia del teorema de Cantor es que para cualquier conjunto existe siempre otro de cardinal mayor. En el capítulo anterior y, unas páginas antes en este mismo capítulo,

hicimos esa afirmación (que dado un conjunto existe otro de cardinal mayor), pero en aquellos casos nos referíamos específicamente a conjuntos formados por ordinales; el teorema de Cantor, en cambio, permite extender la afirmación a todos los conjuntos, no importa cuál sea la naturaleza de sus miembros.

Consideremos entonces el conjunto *universal*, que es el conjunto que lo contiene todo, absolutamente todo lo concebible. El teorema de Cantor nos dice que existe un conjunto que tiene un cardinal aún mayor que él. Pero, ¿cómo puede haber un conjunto que sea mayor que aquel que ya lo contiene todo? Ese conjunto mayor no puede existir; sin embargo, el teorema de Cantor nos dice que sí existe. Llegamos así a una contradicción; es decir, encontramos otra paradoja en la teoría de conjuntos. Esta nueva paradoja, que se suma a la que vimos en el capítulo anterior, es conocida como la *paradoja de Cantor*.

A principios del siglo XX se descubrió una tercera paradoja, que lleva el nombre de Bertrand Russell, y que no es exagerado decir que generó una verdadera crisis en las matemáticas. En el próximo capítulo nos ocuparemos de todas estas paradojas de la teoría de Cantor, y en particular analizaremos qué consecuencias tuvieron para las matemáticas en general.

CAPÍTULO 6

Las paradojas del infinito

En una carta escrita en 1902, el lógico inglés Bertrand Russell formuló una pregunta muy simple, pero que desencadenó en el corazón de las matemáticas una crisis muy profunda que se extendió a lo largo de casi treinta años, y cuyas consecuencias pueden sentirse todavía en la actualidad. La pregunta que Russell formuló es: «¿Este conjunto del que estoy hablando es miembro de sí mismo?».

Cuando en 1883 Cantor escribió su artículo «Fundamentos para una teoría general de variedades» ya era consciente, según comentamos en el capítulo 4, de que su teoría contenía al menos una paradoja; pero ¿qué es exactamente una paradoja? La palabra «paradoja», en realidad, es usada en la literatura y en el lenguaje cotidiano en diferentes sentidos, no todos equivalentes entre sí. Para la lógica, específicamente, una paradoja ocurre cuando, por ejemplo, en una teoría podemos demostrar que un objeto existe y no existe al mismo tiempo, o que un cierto ente tiene propiedades que se contradicen entre sí; es decir, una paradoja se produce cuando se descubre que una teoría conduce a una imposibilidad lógica. Es en este sentido lógico del término que decimos que Cantor encontró una paradoja en su teoría, o, lo que es lo mismo, halló una contradicción lógica, y el hallazgo de una contradicción es siempre una mala noticia porque indica que puede haber un error de base en la teoría, un fallo que debe ser localizado y subsanado.

En un sentido completamente distinto, la palabra «paradoja» a veces es usada también como sinónimo de «sorprendente» o de «contrario a la intuición», sin que ello implique necesariamente la existencia de una contradicción lógica. Por ejemplo, en referencia a lo visto en el capítulo anterior, podríamos decir que el hecho de que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ es «paradójico», dado que nuestra percepción, que solo abarca cantidades finitas, nos lleva a pensar que si agregamos

un elemento nuevo a un cierto conjunto, entonces la cantidad total de elementos debe aumentar; en cambio, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ nos dice que, en el caso del infinito, la cantidad sigue siendo la misma. Pero, aunque sorprendente, la igualdad $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ no es una paradoja en el sentido lógico del término, porque no implica genuinamente una contradicción lógica, solo nos dice que las reglas que rigen a las cantidades infinitas son diferentes de las que rigen a las cantidades finitas.

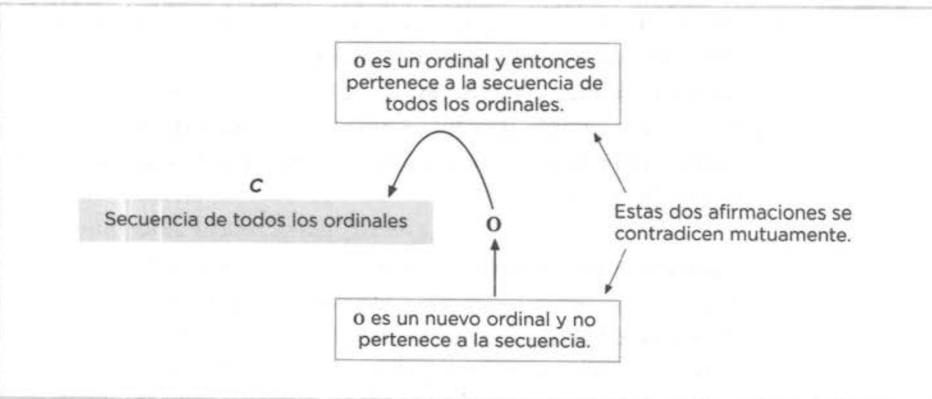
En este libro estamos usando la palabra «paradoja» siempre en el primer sentido, refiriéndonos a la existencia de una incoherencia lógica en una teoría. Hecha esta aclaración, volvamos a la paradoja que encontró Cantor en 1883 y recordemos brevemente en qué consiste. La secuencia de los ordinales —dice Cantor— está generada a partir de dos principios. El primero afirma que cada ordinal tiene un sucesor inmediato; este es el principio, por ejemplo, que nos asegura que inmediatamente después de ω viene el ordinal $\omega + 1$.

«Los conjuntos infinitos tienen algunas propiedades curiosas, que a veces han sido llamadas paradójicas. En realidad no son paradójicas, solo son algo sorprendentes cuando se las considera por primera vez.»

— Raymond Smullyan, lógico norteamericano, en *Satán, Cantor y el infinito* (1992).

El segundo principio dice que, dada cualquier secuencia infinita de ordinales, siempre hay otro ordinal que es el que sigue inmediatamente a todos ellos y que, en particular, no pertenece a esa secuencia. Este principio nos garantiza, por ejemplo, que después de la sucesión infinita 0, 1, 2, 3, 4,... viene el nuevo ordinal ω, y que después de la sucesión infinita ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$,... viene el nuevo ordinal $\omega + \omega$.

La paradoja aparece cuando intentamos aplicar el segundo principio de generación a la secuencia formada por todos los ordinales, llamémosla C. En efecto, el segundo principio expone que si tomamos la secuencia C de todos los ordinales, entonces existe un nuevo ordinal que viene después de todos ellos, y que no aparece en C; llamemos O (la letra griega ómicron) a este nuevo ordinal. Pero O es también en sí mismo un ordinal, y C contiene a todos los



Representación esquemática de la paradoja de los ordinales.

ordinales, por lo tanto *O* aparece en *C*, pero a la vez acabamos de decir que no aparece; de modo que hemos probado que *O* tiene dos propiedades que se contradicen, no aparece en *C*, pero a la vez sí aparece; hemos encontrado así una paradoja (véase el esquema).

Como dijimos en el capítulo 4, para solucionar este problema Cantor introdujo un tercer principio de generación, una tercera regla según la cual el segundo principio no es aplicable a la secuencia completa de todos los ordinales. En otras palabras, Cantor decretó que *O* no existe.

Aunque en efecto esta tercera regla soluciona la paradoja, no parece ser por sí sola una solución satisfactoria; para expresarlo con una metáfora, estamos dándole al paciente un analgésico que calma su dolor, pero sin buscar las causas reales de su enfermedad. Para encontrar una solución genuina necesitamos saber cuál es la enfermedad que provoca el dolor; o sea, es necesario saber cuál es el fallo básico de la teoría que produce la paradoja.

Para Cantor, la causa profunda de la paradoja radica en la necesidad de hacer la distinción —que él introdujo en su artículo de 1883— entre lo transfinito y el infinito absoluto. Según Cantor, dentro del dominio de lo transfinito caen todos los conjuntos infinitos que la mente humana puede conocer y con los que puede operar, como por ejemplo el conjunto de los números reales o el conjunto de los ordinales de clase I, clase II, clase III o de cualquier otra clase específica. En el dominio de lo absoluto, en cam-

bio, caen aquellos conjuntos que son «demasiado grandes» como para ser accesibles a la mente humana; entre ellos, el conjunto formado por todos los ordinales o el conjunto universal (el conjunto que lo contiene absolutamente todo y del que hablamos en el capítulo anterior). En referencia a este tema, Cantor escribía en su trabajo de 1883:

> Ahora bien, existe una diferencia esencial en el hecho de que yo he fijado en su concepto, de una vez y para siempre, las diferentes gradaciones del infinito propio [que es como Cantor llama al infinito en acto] mediante las clases numéricas (I), (II), (III), etc., y solo entonces considero como tarea no solo investigar matemáticamente las relaciones entre los números transfinitos, sino también perseguirlos y mostrarlos dondequiera que ocurran en la naturaleza. No admite para mí ninguna duda que siguiendo este camino llegaremos siempre más allá, sin encontrar ningún límite insuperable, pero sin conseguir tampoco una captación siquiera aproximada de lo absoluto. Lo absoluto solo puede ser reconocido [es decir, reconocida su existencia], pero nunca conocido, ni siquiera aproximadamente conocido.

Lo absoluto, según Cantor, sigue unas reglas que son diferentes a las de lo transfinito, reglas que no podemos ni siquiera enunciar porque son incognoscibles para nosotros. La paradoja, entonces, nace esencialmente del intento erróneo de aplicar a lo absoluto las reglas de lo transfinito. El tercer principio de generación de ordinales, que en esencia dice que una cierta regla de lo transfinito no se aplica a un cierto conjunto absoluto, no sería, por lo tanto, un principio ad hoc, sino una consecuencia genuina de la filosofía básica que debe seguir la teoría de conjuntos. Análogamente, la solución de la paradoja de Cantor (véase el capítulo anterior) consistiría, según el propio Cantor, simplemente en decir que al conjunto universal, que cae en el dominio de lo absoluto, no se le puede aplicar el teorema que afirma que todo conjunto tiene siempre otro de cardinal mayor (véase el esquema de la página siguiente).

Hay que decir que, en realidad, en el trabajo de 1883 las menciones a lo absoluto, como la que citamos más arriba, se encuentran en mayor medida en unas notas que aparecen después del



Esquema de la paradoja de Cantor, que implica que existe un conjunto mayor que aquel que ya lo contiene todo.

texto principal del artículo, y que la existencia de posibles contradicciones en la teoría de conjuntos está apenas insinuada. Esta reserva, que probablemente tuvo la intención de prevenir posibles ataques a la teoría, fue del todo deliberada, y esto último queda demostrado en una carta que Cantor le escribió a Hilbert el 15 de noviembre de 1899, en la cual, en referencia a su filosofía de la distinción entre lo transfinito y lo absoluto decía: «filosofía que puede encontrar Ud. en los "Fundamentos" publicados el año 1883, especialmente en las notas al final, expresado de un modo bastante claro, pero intencionadamente algo oculto».

Dedekind, que por aquel entonces trabajaba también con conceptos conjuntistas, no parecía haber reparado en la existencia de paradojas, y el propio Cantor, después de la crisis depresiva que sufrió en mayo de 1884, abandonó por completo el tema durante mucho tiempo; como consecuencia, la cuestión de las paradojas de la teoría de conjuntos, hasta que fue redescubierta en el año 1897, cayó totalmente en el olvido.

EL CONGRESO DE 1897

Del 9 al 11 de agosto de 1897 se celebró en Zúrich, Suiza, el Primer Congreso Internacional de Matemáticas, al que asistieron más de 200 especialistas de 16 países, entre ellos Hilbert y Cantor. Puede decirse que este congreso marcó la consagración internacional de

la teoría de conjuntos, ya que muchas de las exposiciones que allí se hicieron trataron sobre aplicaciones de los conceptos conjuntistas, principalmente al cálculo.

«¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo tras el que se oculta el futuro, de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siglos futuros?»

— Primeras palabras de la conferencia de Hilbert en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas.

Pero en las conversaciones que los asistentes mantenían entre sesión y sesión aparecía repetidamente una cuestión muy perturbadora... nada menos que el descubrimiento de una paradoja en la teoría de conjuntos. En efecto, en marzo de 1897, en el boletín del Círculo Matemático de Palermo, el matemático italiano Cesare Burali-Forti había publicado un artículo titulado «Una cuestión sobre números transfinitos» en el que redescubría la paradoja de los ordinales que comentamos más arriba. Dado que en 1883 Cantor no había formulado claramente la paradoja, y esta tomó notoriedad solo a partir del trabajo de Burali-Forti, hoy en día a esta contradicción en la teoría de los ordinales se la conoce como la «paradoja de Burali-Forti» y así la llamaremos también nosotros. Es interesante mencionar, además, que el propio Burali-Forti estuvo presente en el congreso y que presentó allí una ponencia, aunque no sobre el tema de los ordinales, sino sobre una cuestión de geometría.

Hilbert, gran defensor de la teoría de conjuntos, quedó muy preocupado por la aparición de esta paradoja, y a partir de 1897 mantuvo una intensa correspondencia con Cantor acerca de este tema. Durante este intercambio, Cantor volvió a exponer su convicción de que todas las paradojas de la teoría de conjuntos pueden evitarse haciendo la distinción entre lo transfinito y lo absoluto, aunque en esas cartas Cantor ya no utilizaba esas palabras, sino que hablaba de conjuntos «accesibles» e «inaccesibles» (a veces también de conjuntos «consistentes» e «inconsistentes»).

Para Cantor, los conjuntos accesibles son aquellos cuyas propiedades podemos enunciar y estudiar; los inaccesibles, en cambio, están más allá de nuestra capacidad de comprensión, y es por eso que al intentar analizarlos caemos en contradicciones. El problema, por así decirlo, no estaría en los conjuntos en sí, sino en nuestra mente finita y limitada que es incapaz de entender cierta clase de conjuntos.

Hilbert no estaba nada convencido de la validez de esta solución de Cantor; Hilbert entendía que si somos capaces de comprender la definición de un conjunto, entonces también deberíamos ser capaces de conocer todas sus propiedades. La idea de que existen objetos matemáticos incognoscibles era totalmente contraria a su filosofía de las matemáticas, que suele resumirse en su famosa máxima «Debemos saber, y sabremos», frase que Hilbert expuso

CESARE BURALI-FORTI



Burali-Forti nació en Arezzo, Italia, el 13 de agosto de 1861. Estudió matemáticas en la Universidad de Pisa, donde se graduó en 1884, pero nunca llegó a doctorarse porque su propuesta de pensar la geometría desde un punto de vista algebraico (propuesta que hoy es totalmente aceptada) fue, en aquel momento, rechazada por el comité que debía evaluar su trabajo de tesis y Burali-Forti nunca insistió. Hasta 1887 fue profesor de Matemáticas en una escuela de Pisa y ese año se trasladó a Turín, donde comenzó a enseñar en una academia militar, trabajo que conservó hasta el final de su carrera. La falta de un doctorado le impidió ejercer la docencia universitaria, aunque en la Universidad de Turín dio conferencias que fueron muy apreciadas; en esa misma institución trabajó asimismo, informalmente, en estrecho contacto con muchos investigadores. En su vida, Burali-Forti escribió más de 200 artículos sobre geometría, lógica y también sobre la enseñanza de las matemáticas; falleció en Turín el 21 de enero de 1931.

en la conferencia inaugural del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 y que habla de su íntima convicción de que no existen problemas matemáticos inaccesibles.

Pero la interesante discusión epistolar entre Hilbert y Cantor fue trágicamente interrumpida en 1899 y nunca pudo llegar a una conclusión satisfactoria para ambos.

LOS ÚLTIMOS AÑOS

A fines de 1899, Cantor se encontraba preparando la tercera parte de su artículo «Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos», que iba a estar dedicada principalmente a exponer su solución de las paradojas de la teoría de conjuntos; pero nunca pudo concluir el escrito porque su trabajo quedó interrumpido por un durísimo golpe; el 16 de diciembre de 1899 murió su hijo menor Rudolf, de trece años de edad.

Esta terrible pérdida, de la que Cantor jamás pudo recuperarse, le provocó un grave trastorno mental, o tal vez desencadenó un trastorno mental que ya estaba latente. En los años sucesivos pasó alternativamente por períodos de lucidez y de desvarío, y tuvo que ser hospitalizado varias veces en una clínica psiquiátrica de Halle.

En esos años de enfermedad, Cantor volvió al tema de la controversia Shakespeare-Bacon que, en verdad, nunca había abandonado del todo; ejemplo de ello es la siguiente frase, incluida en la carta a Hilbert del 15 de noviembre de 1899 que citamos antes, y en la que Cantor dice: «en este invierno impartiré cinco lecciones en Berlín, igualmente cinco lecciones en Leipzig sobre el mismo tema [la controversia Shakespeare-Bacon], donde he llegado al fondo mismo de la cuestión; los señores filólogos quedarán maravillados».

Pero una muestra del grado que, después de 1900, llegó a alcanzar su obsesión por esta controversia puede verse en un hecho ocurrido en 1911. En septiembre de ese año, Cantor fue invitado a asistir como académico distinguido a la celebración del 500.° aniversario de la fundación de la Universidad de St. Andrews, en Escocia. Ahora bien, como veremos en breve, desde el descubri-

miento en 1902 de la llamada «paradoja de Russell», la cuestión de las contradicciones lógicas en la teoría de conjuntos había pasado al primerísimo plano de la discusión matemática; visto este panorama, está claro que cuando en septiembre de 1911 Cantor subió al estrado de la Universidad de St. Andrews para dar una conferencia, todos los asistentes esperaban oír una disertación sobre las paradojas del infinito; Cantor, en cambio, habló de la controversia Shakespeare-Bacon.

Por otra parte, al año siguiente la Universidad de St. Andrews le otorgó un doctorado honoris causa, pero en ese momento Cantor se encontraba demasiado enfermo y no pudo asistir a la ceremonia.

> «La esencia de la matemática radica precisamente en su libertad.»
>
> — Georg Cantor, en 1883.

Sin embargo, especialmente en los primeros años de su crisis mental, Cantor no abandonó completamente las matemáticas; continuó enseñando en la Universidad de Halle, aunque con periódicas, y a veces largas, ausencias causadas por su enfermedad (por ejemplo, durante todo el año 1909 no pudo impartir sus clases); dio también una conferencia, esta vez sí sobre las paradojas de la teoría de conjuntos, en la reunión de la Unión Matemática Alemana de septiembre de 1903; y asimismo asistió al Tercer Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Heidelberg, Alemania, en agosto de 1904. Pero jamás completó la tercera parte de sus «Contribuciones», ni volvió a publicar artículo alguno sobre matemáticas.

Cantor se jubiló en 1913 y en sus últimos años sufrió muchas privaciones a causa de la escasez de alimentos provocada por la Primera Guerra Mundial. La guerra también impidió el gran festejo que sus colegas alemanes iban a organizar en su honor en 1915 con motivo de su septuagésimo cumpleaños, pues la crisis económica obligó a reducirlo a una pequeña reunión en su casa con algunos amigos. En junio de 1917, Cantor fue hospitalizado por última vez en la clínica psiquiátrica de Halle, donde murió de un ataque cardíaco el 6 de enero de 1918.

Actualmente, en la Universidad de Halle hay un monumento con la forma de un gran cubo de bronce; cada una de sus cuatro caras laterales está dedicada a un profesor que ha dictado cátedra allí; una de esas caras, por supuesto, está consagrada a Cantor. Esta última cara tiene en su parte superior un busto en relieve del matemático alemán, y a la derecha de este la inscripción: «Georg Cantor, matemático, creador de la teoría de conjuntos, 1845-1918». Debajo de la efigie de Cantor se lee la igualdad $c = 2^{\aleph_0}$, donde c, la inicial de *continuum* («continuo», en latín), representa el cardinal de los números reales. A la derecha de esta igualdad se ve el esquema de una demostración de que los racionales son numerables. Finalmente, debajo de la igualdad $c = 2^{\aleph_0}$ aparece una frase que Cantor escribió en su trabajo de 1883 y que ya citamos en el primer capítulo: «La esencia de la matemática radica precisamente en su libertad».

Pero en realidad no necesitamos un monumento para recordar a Cantor, porque su voz nos habla con toda claridad desde sus cartas y sus artículos, y porque, mientras existan las matemáticas, su presencia seguirá siempre viva en su teoría del infinito.

LA CONCEPCIÓN DE FREGE

¿Qué pasó finalmente con las paradojas de la teoría de conjuntos? ¿Cómo pudieron resolverse, si es que se resolvieron? Para responder estas preguntas debemos volver atrás en el tiempo, otra vez a la segunda mitad de la década de 1880.

Recordemos que por esos años Dedekind, y más tarde Cantor, habían propuesto definir a los números naturales y a sus operaciones a partir de conceptos conjuntistas; recordemos también que esta propuesta equivale esencialmente a basar todas las ramas de las matemáticas en la teoría de conjuntos; ejemplifiquemos esta última idea tomando el caso del cálculo. ¿Cómo es posible que el cálculo quede basado en nociones conjuntistas si los naturales se definen en base a esas mismas nociones? Esto se debe a que, a partir de los naturales, se pueden definir los números enteros; de los enteros, a su vez, se definen los racionales; de los racionales

se definen los reales (otra vez usando nociones conjuntistas); y los reales son, finalmente, la base del cálculo.

En esa misma época, el matemático y lógico alemán Gottlob Frege (1848-1925) comenzaba a concebir el mismo proyecto de basar todas las matemáticas en conceptos conjuntistas; es decir, Frege estaba a favor de las intenciones de Cantor y de Dedekind, pero difería, sin embargo, en el estilo de argumentación matemática que ellos usaban; expliquemos en qué consiste esta idea. Durante siglos el modelo de razonamiento matemático por excelencia estuvo dado por los *Elementos* de Euclides, la obra fundamental de la geometría griega, escrita en el siglo III a.C. En su estructura lógica, los razonamientos de Euclides se basan en axiomas, que son afirmaciones cuya verdad se acepta sin demostración; a partir de esos axiomas, se deducen mediante razonamiento lógicos todas las demás verdades de la teoría, verdades que, en el caso de los *Elementos*, son propiedades geométricas.

Ahora bien, Euclides dividió a sus axiomas en dos grupos; en el primero, están los postulados, que son afirmaciones referidas específicamente a objetos geométricos, mientras que en el segundo están las llamadas «nociones comunes», que son reglas generales del pensamiento, es decir, afirmaciones generales que se aplican en cualquier situación, ya sea geométrica o no; un ejemplo de estas nociones comunes es que si dos cosas son iguales a una tercera, entonces son iguales entre sí (véase el esquema).

El punto que queremos destacar es que el sistema de axiomas de Euclides no solamente se refiere a los objetos geométricos en sí, sino que además nos da reglas más amplias acerca de lo que

Algunas de las nociones comunes de Euclides y su traducción al lenguaje moderno.

Euclides	Lenguaje moderno
Si dos cosas son iguales a una tercera entonces son iguales entre sí.	Si $a=c$ y $b=c$ entonces $a=b$.
Si a cosas iguales se añaden cosas iguales se obtienen cosas iguales.	Si $a=b$ entonces $a+c=b+c$.
Si de cosas iguales se sacan cosas iguales se obtienen cosas iguales.	Si $a=b$ entonces $a-c=b-c$.

podemos decir, o no, sobre los objetos en general. En otras palabras, el sistema de axiomas no solo habla de las propiedades de los objetos geométricos, sino que nos guía en las conclusiones que podemos extraer de esas propiedades.

La teoría de conjuntos de Cantor, que es la misma en la que se basaba Dedekind, no tenía una estructura lógica tan depurada; la teoría no tenía axiomas; es decir, a diferencia de Euclides, Cantor nunca dio una lista de las propiedades básicas en las que fundamentaba sus demostraciones. Él se limitaba a definir los objetos (por ejemplo, los ordinales), muchas veces usando un lenguaje bastante coloquial, y directamente de esas definiciones extraía las conclusiones que le dictaba una lógica más o menos intuitiva. Para Frege, esta situación era inaceptable; según él, la teoría de conjuntos debía tener una estructura euclídea, es decir, debía comenzar con una lista clara y precisa de definiciones y de axiomas (incluyendo estos a las nociones comunes), a partir de los cuales se pudieran deducir rigurosamente todas las verdades de la teoría.

Pero Frege iba aún más allá, él deploraba que en las matemáticas en general —no solo en la teoría de conjuntos— se usara un lenguaje coloquial o que se apelara al sentido común en los razonamientos, prácticas que él denominaba «psicologismo». Frege entendía que las matemáticas debían tener un lenguaje específico, expresado mediante símbolos creados con ese fin y que las reglas de deducción lógica (las reglas que nos dicen las conclusiones que podemos extraer de determinadas premisas) debían estar asimismo expresadas con toda precisión usando ese mismo lenguaje.

Como dijimos, esta preocupación de Frege por el «psicologismo» se refería a las matemáticas en general, no solo a la teoría de conjuntos en particular; de hecho, sus primeras propuestas para un lenguaje matemático riguroso son anteriores al inicio de la teoría de conjuntos. Sin embargo, cuando, a la vez que Dedekind, en la segunda mitad de la década de 1880, Frege concibió la idea de fundamentar todas las matemáticas en la teoría de conjuntos, se concentró en aplicar el lenguaje que había creado a esa teoría en particular.

Frege dedicó muchos años a desarrollar los símbolos y las reglas de su lenguaje riguroso, que expuso por primera vez en su

libro *Conceptografía*, de 1879 (*Begriffsschrift* en alemán). Desde todo punto de vista, el lenguaje creado por Frege es muy diferente de nuestra escritura habitual; en realidad, más que un texto parece un dibujo lineal. Es probable que esta diferencia fuera deliberada y que tuviera como finalidad lograr que el lenguaje riguroso de las matemáticas se alejara todo lo posible del lenguaje coloquial. Sin embargo, esta decisión tuvo una consecuencia negativa, porque el sistema resultaba muy arduo de comprender y esto redujo sensiblemente la penetración que la obra de Frege pudo haber tenido en el público interesado en ella.

LA PARADOJA DE RUSSELL

En 1902, Frege acababa de enviar a la imprenta el segundo tomo de sus *Fundamentos de la aritmética*, la obra en la que desarrollaba su programa de fundamentar las matemáticas en la teoría de conjuntos, cuando recibió una carta del lógico inglés Bertrand Russell (1872-1970); la carta está fechada en Friday's Hill, Haslemere, Reino Unido, el 16 de junio de 1902, y ocupa apenas una página. En esa carta, Russell, que había leído el primer tomo de los *Fundamentos*, comenzaba elogiando el trabajo de Frege y manifestándose completamente a favor de lo que él intentaba hacer; «pero —agregaba Russell— he encontrado una pequeña dificultad».

¿Cuál era esa dificultad? Uno de los axiomas en los que Frege basa la teoría de conjuntos es el llamado *axioma de comprensión*, que expresado en lenguaje coloquial dice que a toda propiedad le corresponde un conjunto, que es el conjunto formado por todos los objetos que cumplen esa propiedad. Por ejemplo, a la propiedad «ser un libro de matemáticas» le corresponde el conjunto formado por todos los libros de matemáticas; a la propiedad «ser un número racional» le corresponde el conjunto de todos los números racionales; y así sucesivamente. En su carta a Frege, Russell formula la siguiente pregunta: ¿qué sucede si tomamos la propiedad «ser un conjunto que no es miembro de sí mismo»?

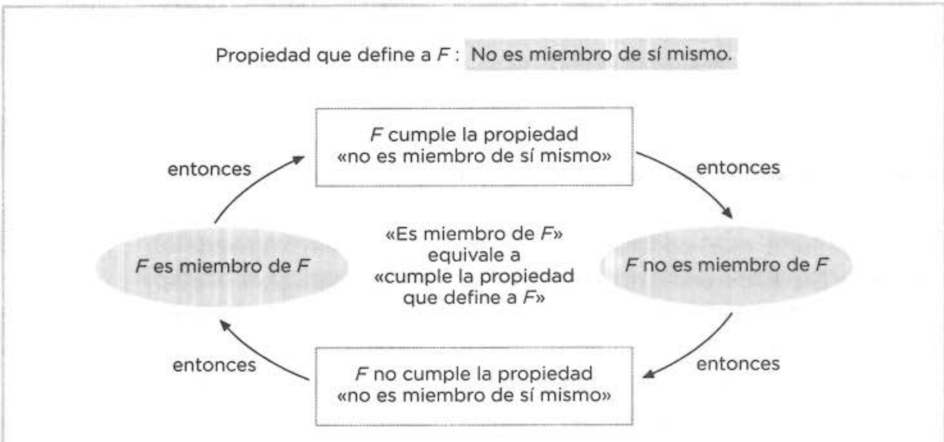
Ahora bien —dice Russell—, según el axioma de Frege, a la propiedad de «ser un conjunto que no es miembro de sí mismo» le corresponde un conjunto, al que llamaremos *F*, que está formado por todos los conjuntos que cumplen la propiedad de no ser miembros de sí mismos. La pregunta es: ¿*F* es miembro de sí mismo?

Si *F* fuera miembro de sí mismo, entonces, como todo miembro, cumpliría la propiedad que define al conjunto; por lo tanto, *F* no sería miembro de sí mismo. Esto es una contradicción, porque partimos de una suposición y llegamos a la conclusión opuesta. Deducimos entonces que la suposición inicial no puede ser verdadera; es decir, *F* no es miembro de sí mismo.

Pero si *F* no es miembro de sí mismo, entonces no cumple la propiedad que define a *F*; por lo tanto, sí sería miembro de sí mismo. Tenemos otra contradicción (véase el esquema).

En resumen, *F* no puede ser miembro de sí mismo, pero tampoco puede dejar de serlo; esto es una imposibilidad lógica. El conjunto *F*, cuya existencia está garantizada por el axioma de comprensión, no puede existir porque su existencia genera una contradicción lógica. Por lo tanto, el axioma de comprensión, que parecía tan inocente, es contradictorio, genera una paradoja. La paradoja de los conjuntos que no son miembros de sí mismos es conocida actualmente como la «paradoja de Russell».

Esquema de la paradoja de Russell. Las flechas indican el orden en que deben hacerse las deducciones lógicas.



GOTTLOB FREGE



Friedrich Ludwig Gottlob Frege nació en Wismar, Alemania, el 8 de noviembre de 1848. En 1869 ingresó en la Universidad de Jena, también en Alemania, para estudiar matemáticas, y en 1871 se trasladó a la Universidad de Gotinga, donde, además de matemáticas, estudió física, química y filosofía. Se doctoró en Gotinga en 1873 con una tesis en la que proponía un lenguaje lógicamente riguroso para la geometría. Después de recibir la carta de Russell de 1902, en la que este le planteaba la paradoja del conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos, Frege cayó en un profundo abatimiento. Intentó recomponer su sistema y para ello modificó el axioma responsable de la paradoja, pero el sistema así corregido también resultó tener paradojas, aunque Frege tardó varios años en darse cuenta. Gran parte de sus últimos trabajos sobre lógica y filosofía estaban sin publicar en el momento de su muerte; Frege los dejó en su testamento a su hijo adoptivo Alfred con estas palabras:

> No desdeñes las piezas que he escrito. Aunque no todo esto sea oro, hay oro en ellas. Creo que hay aquí cosas que algún día podrán tener un valor mucho mayor que el que ahora tienen. Cuídate de que nada se pierda. Es una buena parte de mí lo que te lego con esto.

Gottlob Frege falleció en Bad Kleinen, Alemania, el 26 de julio de 1925.

LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS

Recordemos que hemos convenido, tal como se hace usualmente, en llamar «paradoja de Burali-Forti» a la paradoja de los ordinales; otra convención usual que adoptaremos es llamar «paradoja de Cantor» a la paradoja del conjunto universal; recordemos (véase el capítulo 4) que esta última paradoja se relaciona con el teorema que dice que para todo conjunto existe otro de cardinal aún mayor; pero como el conjunto universal es, por definición, el

conjunto que lo contiene *todo*, entonces no puede haber otro conjunto además de él, a la vez que el teorema nos dice que sí debe haberlo; tenemos así una contradicción.

Hecha esta aclaración sobre los nombres, digamos que la paradoja de Burali-Forti y la de Cantor, aunque causaron preocupación en el mundo matemático, no provocaron, en cambio, una alarma descontrolada.

Es cierto que las paradojas constituían un problema que había que resolver, pero a la vez también es verdad que las dos paradojas se refieren a objetos, como el conjunto de todos los ordinales o el conjunto universal, que jamás aparecían en los razonamientos del cálculo o de cualquier otra rama de las matemáticas que empleara nociones conjuntistas. Por otra parte, además de la propuesta de solución de Cantor ya mencionada, muchos otros tenían confianza en que algún ajuste técnico en la teoría de conjuntos, como por ejemplo alguna modificación conveniente en las definiciones, podría solucionar las paradojas. En resumen, aunque todos coincidían en que había un problema, este parecía circunscribirse a un área muy específica de la teoría de conjuntos y ciertamente no parecía irresoluble.

«No admite para mí ninguna duda que siguiendo este camino llegaremos siempre más allá, sin encontrar ningún límite insuperable.»

— Georg Cantor, en 1883.

Sin embargo, la paradoja de Russell sí provocó una crisis de grandes proporciones; porque el axioma que dice que a toda propiedad le corresponde un conjunto había sido utilizado, implícitamente, una y otra vez durante años por todos aquellos que en las diferentes ramas de las matemáticas aplicaban nociones conjuntistas. Al probar que este axioma es contradictorio, Russell no solamente derribaba el programa de Frege, sino que echaba un manto de duda sobre todos los desarrollos basados en la teoría de conjuntos; muy en especial, quedaba en entredicho la validez del cálculo. Peor todavía, el axioma de comprensión es realmente una afirmación que





FOTO SUPERIOR:
Cada cara lateral del cubo de este monumento de la Universidad de Halle está dedicada a un profesor que dictó cátedra allí. A la izquierda se ve la cara dedicada a Victor Klemperer (1881-1960), profesor de Filología; la cara de la derecha es la dedicada a Cantor.

FOTO INFERIOR:
Detalle de la cara del monumento dedicada a Cantor. Bajo la imagen del matemático alemán se lee la igualdad $c = 2^{\aleph_0}$, y al pie aparece una frase que Cantor escribió en su trabajo de 1883: «La esencia de la matemática radica precisamente en su libertad».

parece obvia, y si una afirmación en apariencia tan inocente resultaba ser contradictoria, ¿qué riesgos ocultos podía haber en otros axiomas o suposiciones que, de manera implícita o explícita, los matemáticos venían usando confiadamente en sus razonamientos?

La crisis provocada por la paradoja de Russell excedió el marco de la teoría de conjuntos, dado que los matemáticos se cuestionaron la validez de *todos* sus razonamientos y llegaron a preguntarse incluso qué estudiaban realmente las matemáticas. Esta crisis tan profunda es conocida hoy en día como la «crisis de los fundamentos» y provocó discusiones, a veces acaloradas, que se extendieron a lo largo de casi treinta años. Esta amplitud en el tiempo, y la ya mencionada amplitud de los temas discutidos, impiden que podamos hablar aquí de todas las ramificaciones y consecuencias de esta crisis; nos limitaremos específicamente a explicar cómo estas discusiones afectaron la cuestión de las paradojas de la teoría de conjuntos.

LA SOLUCIÓN

A principios del siglo XX eran muchos los matemáticos que creían que para resolver el problema de las paradojas de la teoría de conjuntos bastaba con dar una formulación adecuada de sus axiomas; el primero en proponer una solución viable en ese sentido, en el año 1908, fue el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953).

El sistema de axiomas de Zermelo fue perfeccionado en 1919 por el también matemático alemán Abraham Fraenkel (1891-1965), quien agregó algunos axiomas que eran necesarios y que Zermelo no había tomado en cuenta; es por eso que en la actualidad se habla de los «axiomas de Zermelo-Fraenkel», expresión que en la literatura especializada en teoría de conjuntos suele abreviarse simplemente como ZF. Estos axiomas constituyen hoy en día la formulación estándar de la teoría de conjuntos y permiten solucionar todas las paradojas conocidas. La aclaración de «conocidas» se debe a que el matemático checo Kurt Gödel (1906-1978) demostró que no hay modo infalible de garantizar que

un sistema de axiomas estará libre de paradojas; en consecuencia, aunque los matemáticos están íntimamente convencidos de que ZF no conduce a contradicciones lógicas y que, de hecho, en todos los años transcurridos desde 1919 no se ha encontrado ninguna, no hay modo matemáticamente infalible de demostrar que jamás aparecerá alguna paradoja.

Listamos a continuación los axiomas de Zermelo-Fraenkel:

1. Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos miembros.

2. Existe el conjunto vacío.

3. Dados los objetos x e y existe siempre el par formado por ambos.

4. La unión de dos o más conjuntos también es un conjunto.

5. Existe al menos un conjunto infinito.

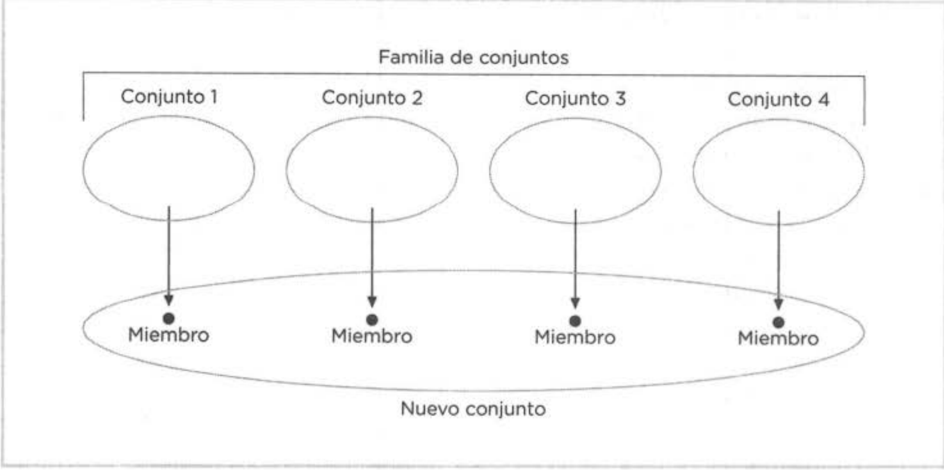
6. Solo las propiedades expresables a partir de los restantes axiomas pueden ser usadas para definir un conjunto.

7. Dado un conjunto cualquiera, existe siempre su conjunto de partes (véase el capítulo 5).

8. Dada una familia, finita o infinita, de conjuntos no vacíos (es decir, conjuntos cada uno de los cuales tiene al menos un miembro), existe siempre un nuevo conjunto que contiene exactamente un miembro de cada conjunto de la familia (véase el esquema explicativo de este axioma en la página siguiente).

9. Ningún conjunto es miembro de sí mismo.

Analicemos brevemente cómo ZF evita que suceda la paradoja de Russell y la paradoja de Cantor.



Esquema explicativo del axioma de elección. Se elige un miembro de cada conjunto y con todos ellos se forma un nuevo conjunto.

Comencemos por decir que el axioma 9 implica que el conjunto universal no existe, porque sería un conjunto que se tiene a sí mismo como miembro, y el axioma 9 dice que no existen conjuntos así. De hecho, cuando los axiomas se escriben en el lenguaje simbólico adecuado puede probarse, en base al axioma 6, que el conjunto universal ni siquiera puede definirse. Recordemos, además, que la paradoja de Cantor surge al pensar, precisamente, en el cardinal del conjunto universal; pero si este conjunto no existe en realidad, entonces la paradoja de Cantor nunca llega a suceder.

En cuanto a la paradoja de Russell, recordemos que surge al considerar el conjunto F formado por todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos; pero el axioma 9 nos dice que *todos* los conjuntos cumplen la condición que define a F; por lo tanto, F sería en realidad el conjunto de todos los conjuntos. Pero el conjunto de todos los conjuntos, al ser él mismo un conjunto, se tendría a sí mismo como miembro y, en consecuencia, otra vez por el axioma 9, no puede existir (de hecho —vale la misma observación que hicimos antes para el universal—, es posible probar que F en realidad no puede ni siquiera definirse en la teoría). En conclusión, en realidad no existe, por lo que la paradoja de Russell nunca sucede.

La paradoja de Burali-Forti se resuelve de modo similar, demostrando que el conjunto de todos los ordinales no existe.

UNA SOLUCIÓN PARA LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

A pesar del éxito de ZF, a lo largo del siglo XX se propusieron otros sistemas de axiomas para la teoría de conjuntos, sistemas que suelen ser mencionados usando las iniciales de quienes los formularon por primera vez. Tenemos así, por ejemplo, el sistema NBG, por John von Neumann, Paul Bernays y Kurt Gödel; o el sistema MK, por Robert Lee Morse y John L. Kelley.

Estos distintos sistemas de axiomas no son equivalentes entre sí. Es decir, no son meramente distintas formulaciones de la misma idea, sino que hay entre ellos diferencias esenciales; en particular, no todos los sistemas ofrecen la misma solución para las paradojas. Y aunque ZF es el sistema de axiomas más usado —en parte por ser el más sencillo—, los otros tienen también sus grupos de defensores.

Por razones de espacio, es imposible detallar aquí la solución que cada sistema ofrece para las paradojas, pero sí podemos decir que en todos los casos, o bien —como en el caso de ZF— se demuestra que los conjuntos que Cantor llamaba «inaccesibles» no existen, o bien —este es el caso de NBG y MK— se admite que los conjuntos «inaccesibles» sí existen, pero se demuestra que, como decía Cantor, cumplen reglas que son diferentes que las de los demás conjuntos.

Es decir, la moderna teoría de conjuntos reivindica la idea de Cantor de que la solución de las paradojas pasa por hacer una distinción entre los conjuntos «accesibles» y los «inaccesibles».

Ahora bien, ¿todo esto significa que existen diferentes teorías de conjuntos? Y en definitiva, ¿los conjuntos inaccesibles existen o no? Estas preguntas todavía hoy no tienen una respuesta que convenza unánimemente a todos los matemáticos; a grandes rasgos, hay dos posturas que suelen adoptarse en torno a estas cuestiones, llamadas *platonismo* y *formalismo*.

¿Qué es el platonismo? El platonismo sostiene que los objetos matemáticos tienen una existencia objetiva que es independiente de la mente humana, y que el trabajo de los matemáticos consiste básicamente en *descubrir* las características de esos objetos. Según esta postura, hay una única teoría de conjuntos verdadera;

el hecho de que por ahora convivan diferentes sistemas de axiomas se debe simplemente a que todavía los matemáticos no han sido capaces de determinar cuál es el sistema correcto. Según los platonistas, cuando se haya determinado cuál es la verdadera teoría de conjuntos, lo que ella dictamine acerca de la existencia, o no, de los conjuntos inaccesibles será la verdad.

El formalismo, en cambio, sostiene que la matemática es simplemente una creación humana, similar en muchos aspectos a la música o la literatura. Las matemáticas, según este punto de vista, son esencialmente un juego lingüístico en el que hay ciertos puntos de partida —que son los axiomas— y ciertas reglas lógicas que permiten sacar conclusiones a partir de ellos. El trabajo del matemático consistiría, según este punto de vista, en descubrir hacia dónde nos llevan las reglas de juego; este trabajo no sería muy diferente, en el fondo, al que hace un ajedrecista cuando busca la jugada óptima en una cierta posición del tablero.

Para el formalismo, la cuestión de si los conjuntos «inaccesibles» existen, o no, carece de todo sentido; para ciertos sistemas de reglas la respuesta es que sí existen, para otros sistemas de reglas la respuesta es que no existen, pero eso es todo lo que puede decirse al respecto. Ambas posturas tienen sus matices, las dos tienen sus puntos fuertes y sus puntos débiles, y las dos conviven hoy en día en el pensamiento de los matemáticos.

La discusión entre platonismo y formalismo es un producto de la crisis de los fundamentos, por lo que Cantor no llegó a conocerla, pero, de haber sabido del debate, ¿con cuál de las dos posturas se habría sentido identificado? Por una parte, dijimos que Cantor creía que los matemáticos tenían libertad absoluta en la definición de conceptos y la postulación de sus propiedades, con la única limitación de que estas no conduzcan a contradicciones lógicas; esa postura lo acercaría al formalismo. Pero, al mismo tiempo, en algunos textos Cantor parece sostener la creencia de que esos conceptos definidos por los matemáticos tienen una existencia objetiva en la mente de la divinidad, y esta idea lo acercaría al platonismo.

El debate entre el platonismo y el formalismo se vincula, finalmente, con la solución del problema de la hipótesis del continuo

NICOLAS BOURBAKI



Imagen ficticia del «general Nicolas Bourbaki».

Nicolas Bourbaki, según una biografía apócrifa, sería un general del ejército francés, de ascendencia griega, quien después de retirarse de la milicia se habría dedicado al estudio de las matemáticas; su residencia actual sería la inexistente ciudad de Nancago, nombre que parece provenir de la combinación de los de las ciudades de Nancy, en Francia, y Chicago, en Estados Unidos, y a cuyas universidades habrían estado ligados algunos de los «creadores» de Bourbaki. En realidad, «Nicolas Bourbaki» es el seudónimo colectivo que a mediados de la década de 1930 adoptó un grupo de matemáticos, en su mayoría franceses. Según se dice, el grupo eligió tomar este seudónimo, en parte como broma, y en parte para evitar que sus obras colectivas estuvieran firmadas por una larga lista de nombres. Aunque casi todos sus miembros han preferido mantener en secreto su pertenencia al grupo, se sabe que este ha tenido siempre unos diez o veinte integrantes, y que entre sus fundadores estuvieron los notables matemáticos franceses André Weil (1906-1998), Jean Dieudonné (1906-1992) y Claude Chevalley (1909-1984).

(a la que llamaremos, para abreviar, HC). Recordemos que HC es la conjetura, planteada por Cantor, de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ahora bien, en 1940 Kurt Gödel demostró que, a partir de cualquiera de los sistemas de axiomas habitualmente usados para la teoría de conjuntos, es imposible demostrar que la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es falsa.

Pero en 1963 el matemático norteamericano Paul Cohen (1934-2007) demostró a su vez que tampoco puede probarse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es verdadera. Es decir, la hipótesis del continuo no puede ser demostrada, pero tampoco refutada por ninguno de los sistemas de axiomas de la teoría de conjuntos usados habitualmente. Entonces, ¿es verdadera o es falsa? Para el formalismo, la pre-

gunta no tiene sentido; los axiomas son reglas de juego elegidas arbitrariamente que no refieren a ninguna «verdad» exterior y, según este punto de vista, es tan lícito agregar a cualquiera de las teorías de conjuntos un nuevo axioma que permita demostrar HC, así como agregar otro axioma que permita refutarla.

Para los platonistas, en cambio, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es objetivamente, independientemente de nuestros axiomas, verdadera o falsa, y tarde o temprano se hallará un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos que permita resolver esa cuestión. Para los formalistas, entonces, el problema de HC está resuelto; para los platonistas, la cuestión sigue abierta.

LAS MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS

En el año 1935 se reunió por primera vez Nicolas Bourbaki. Parece una oración extraña, que motivaría enseguida la pregunta de con quién se reunió Bourbaki, pero la verdad es que «Nicolas Bourbaki» no es una persona, sino el nombre colectivo que adoptó un grupo de matemáticos, en su mayoría franceses. Decíamos, entonces, que en 1935 se reunió por primera vez Nicolas Bourbaki, y el fin de esa primera reunión fue establecer los medios que usarían para alcanzar el objetivo que colectivamente se habían propuesto. Veamos cuáles son esos medios y cuál es ese objetivo, en el que los Bourbaki todavía trabajan, si bien los miembros del grupo original, desde luego, se han ido renovando con los años.

Como vimos, los axiomas de Zermelo-Fraenkel (nos referimos solo a estos axiomas en particular porque son los más usados) permitieron finalmente solucionar el problema de las paradojas de la teoría de conjuntos. Quedaba entonces allanado el camino para retomar el programa de Frege de fundamentar todas las ramas de las matemáticas en conceptos conjuntistas; como ya se ha dicho, Russell había intentado retomar dicho programa sin éxito.

El objetivo de los Bourbaki es, entonces, completar el proyecto de Frege y para lograrlo, en aquella primera reunión de 1935 acordaron redactar una serie de volúmenes, bajo el título general

de *Elementos de matemáticas*, cada uno de los cuales estaría dedicado a una rama de esa ciencia. En cada volumen los conceptos básicos de la rama en cuestión serían definidos y estudiados con los máximos criterios de rigor lógico, con el fin de ofrecer una base firme para todos los desarrollos posteriores. En todos los casos, la base fundamental de estas definiciones es la teoría de conjuntos.

Hasta el momento, los Bourbaki llevan redactados más de una docena de volúmenes los cuales, a pesar de algunas críticas a la aridez de su redacción y de su estilo, han tenido, y tienen, una enorme influencia a la hora de establecer la base lógica de las matemáticas contemporáneas.

Por otra parte, aunque la obra de los Bourbaki está esencialmente destinada a servir de base al trabajo de los científicos —es decir, de los investigadores que crean o descubren nuevos conceptos o teoremas—, su influencia se sintió también con mucha fuerza en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo durante la segunda mitad del siglo XX, a través de las llamadas «matemáticas modernas». En aquel momento, esa corriente propuso, para bien o para mal —las opiniones al respecto estuvieron muy divididas en su tiempo—, que todos los conceptos matemáticos tenían que ser enseñados a partir de ideas conjuntistas, incluso en el caso de la instrucción elemental destinada a los niños más pequeños. La discusión de los beneficios o perjuicios causados por esta postura excede con mucho los fines de este libro; diremos solamente que en la actualidad esta corriente didáctica está muy desprestigiada y que ha sido abandonada casi por completo.

Sin embargo, a nivel científico, la teoría de conjuntos está muy viva y goza de perfecta salud. De hecho, tal como se lo habían propuesto Cantor, Dedekind y Frege, en la actualidad se ha transformado, a través del trabajo de los Bourbaki, en la base de todas las matemáticas.

Lecturas recomendadas

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 1996.

BUNCH, B.H., *Matemática insólita (Paradojas y paralogismos)*, México, Reverté, 1997.

CANTOR, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos (Escritos y correspondencia selecta)*, edición de José Ferreirós; Barcelona, Crítica, 2006.

HAWKING, S. (compilador y comentarista), *Dios creó los números (Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia)*, Barcelona, Crítica, 2010.

KASNER, E., NEWMAN, J., *Matemáticas e imaginación*, Barcelona, Salvat, 1994.

LAVINE, S., *Comprendiendo el infinito*, México, Fondo de Cultura Económica, 2005.

MARTINÓN, A. (compilador), *Las matemáticas del siglo XX (Una mirada en 101 artículos)*, Madrid, Nivola, 2000.

ODIFREDDI, P., *La matemática del siglo XX*, Madrid, Katz Barpal Editores, 2006.

SMULLYAN, R., *Satán, Cantor y el infinito*, Barcelona, Gedisa, 1995.

STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

Índice